www.elsolucionario.net

Cinemática y estática

(Teoría y problemas)

J. Martín

www.elsolucionario.net

Find your solutions manual here!

El Solucionario
www.elsolucionario.net

Subscribe RSS | Find on Facebook | Follow my Tweets

Encuentra en nuestra página los Textos Universitarios que necesitas!

Libros y Solucionarios en formato digital
El complemento ideal para estar preparados para los exámenes!

Los Solucionarios contienen TODOS los problemas del libro resueltos y explicados paso a paso de forma clara..

Visitanos para descargarlos GRATIS!
Descargas directas mucho más fáciles...

WWW.ELSOLUCIONARIO.NET

Biology Investigación Operativa Computer Science
Matemáticas Avanzadas
Physics Estadística Chemistry Geometría
Math
Termodinámica Cálculo Electrónica Circuitos Business
Mechanical Engineering
Civil Engineering Economía Análisis Numérico
Ecuaciones Diferenciales
Electrical Engineering Álgebra
Electromagnetismo

Find your solutions manual here!

www.elsolucionario.net

Primera edición: diciembre de 1997

La presente obra fue galardonada en el quinto concurso
"Ajuts a l'elaboració de material docent" convocado por la UPC.

Con la colaboración del Servei de Publicacions de la UPC

Diseño de la cubieta: Antoni Gutiérrez

© José Martín, 1997

© Edicions UPC, 1997
Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL
Jordi Girona Salgado 31, 08034 Barcelona
Tel.: 934 016 883 Fax: 934 015 885
Edicions Virtuals: www.edicionsupc.es
e-mail: edupc@sg.upc.es

Producción: CPET (Centre de Publicacions del Campus Nord)
La Cup. Gran Capità s/n, 08034 Barcelona

Depósito legal: B-49.607-97
ISBN: 84-8301-238-3

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, así como la exportación e importación de ejemplares para su distribución y venta fuera del ámbito de la Unión Europea.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Prólogo

La *Física*, en su sentido más amplio, es la parte de la ciencia dedica al estudio de la materia y sus interacciones mutuas, a través de las cuales se deducen sus *propiedades* y se formulan las leyes que rigen los *fenómenos físicos*, tanto los que observamos directamente en la naturaleza, como los que crean artificialmente en los laboratorios de investigación. A pesar de la gran variedad que presentan los fenómenos físicos, aparentemente sin conexión, todos ellos obedecen a unos pocos principios fundamentales, que una vez comprendidos, al ser aplicados a nuevos problemas, facilitan su resolución, lo que permite ampliar el conocimiento del comportamiento de la naturaleza.

El contenido de la física se distribuye en diferentes ramas: mecánica, calor, óptica, electromagnetismo, física relativista, física cuántica, física nuclear, física de altas energías, entre otras. Las cuatro primeras constituyen el contenido de la llamada *física clásica*, cuyas leyes fundamentales ya estaban formuladas a finales del siglo IXX, y el resto de las ramas, las cuales se han ido desarrollando a lo largo del siglo XX, se denominan genéricamente *física moderna*.

Todas las ramas de la física constituyen campos muy importantes de especialización y actividad profesional y forman una parte esencial del actual desarrollo tecnológico. Aunque temáticamente existe entre las diferentes ramas de la física muy poca o ninguna conexión, los principios de la mecánica han sido la guía para todas ellas, por lo que su enseñanza, junto con las otros tres partes de la física clásica, han estado, y seguirán estando incluidas en los programas de formación de las diferentes ramas de la ingeniería.

El desarrollo tecnológico plantea a los ingenieros problemas ligados, por una parte, al cálculo de diversas estructuras estáticas, y por otra, al diseño, construcción y explotación de todo tipo de máquinas, motores y variados mecanismos utilizados en procesos industriales, utilizándose en su construcción diferentes piezas mecánicas, a las cuales designaremos con el nombre genérico de *cuerpos*. En la solución de ambos tipos de problemas aparentemente muy distintos, una parte esencial afecta al estado de reposo o movimiento de los cuerpos, siendo la *estática* y la *dinámica*, las partes de la *mecánica* en las que se definen las leyes generales del equilibrio y el movimiento de los cuerpos materiales, constituyendo por tanto su estudio, una de las bases físicas necesarias de las disciplinas tecnológicas.

En este sentido restringido, la mecánica, trata de las leyes generales del equilibrio o movimiento de los cuerpos sometidos a la acción de las fuerzas que les son aplicadas. El movimiento es, evidentemente, el más común de los fenómenos observados y por tanto, la primera de las ramas de la física que se desarrolló. El estudio del movimiento de los cuerpos prescindiendo de las causas que lo producen y de su contenido material, constituye una parte de la dinámica que se denomina *cinemática*.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Para su estudio, se ha utilizado desde el principio el análisis vectorial, lo que permite expresar los principios fundamentales de la mecánica de una manera concisa y analizar problemas de cinemática y de estática cuya solución por métodos escalares sería muy compleja o incluso imposible de obtener. Atendiendo al tratamiento vectorial de la mecánica, se ha considerado oportuno incluir inicialmente una parte matemática dedicada a el álgebra de los *vectores* y a sus operaciones fundamentales, con el objetivo de hacer comprensible su utilización posterior, tanto en la cinemática como en la estática.

El presente volumen consta de dos partes, la cinemática y la estática. Se expone primero la cinemática como una teoría geométrica del movimiento, la cual requiere únicamente la utilización de las magnitudes *espacio* y *tiempo*. Se inicia su estudio con la cinemática de la partícula de la *partícula* seguida de la cinemática del *sólido rígido*, con el fin de definir, en la primera parte, las magnitudes el movimiento y poder resolver inicialmente problemas sencillos, para aplicarlos después al movimiento de los sólidos, cuyo estudio requiere la utilización de conceptos más complejos. Para facilitar la comprensión del movimiento del sólido rígido, se ha limitado su estudio al caso del movimiento plano, dejando para cursos posteriores el estudio del movimiento del sólido rígido en el espacio.

En la estática, se introducen inicialmente los conceptos de *masa* y *fuerza*, como las magnitudes fundamentales que describen el contenido material del *espacio físico*, cuyo sustrato matemático sigue siendo el espacio geométrico de la cinemática. De una forma análoga a la cinemática, se analizan primero los sistemas de fuerzas concurrentes, correspondientes al equilibrio de una partícula, y a continuación el equilibrio de los sólidos bajo la acción de fuerzas *coplanarias*.

En cada capítulo, primero se expone la teoría correspondiente seguida de una serie de problemas resueltos en los que se muestra como se debe hacer uso de la teoría para abordar su solución. Los problemas están estrechamente vinculados con la teoría, por lo que el trabajo dedicado a ellos es no menos importante que el dedicado al estudio de la teoría expuesta en el texto. El material que se presenta tanto en la teoría como en los problemas, en general, no requiere más conocimientos previos que los del álgebra, álgebra vectorial, trigonometría, cálculo básico y cálculo vectorial elemental. El libro es un material didáctico destinado a los estudiantes de los primeros curso de las escuelas de ingeniería y centros de formación superior, siendo su objetivo el de desarrollar en el estudiante la capacidad de comprender y utilizar los fundamentos de la mecánica, para analizar cualquier problema técnico y obtener su resultado de una manera sencilla y lógica.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Indice

1 Vectores libres

1.1 **Introducción** 15
1.2 **Vectores libres** 15
1.3 **Operaciones con vectores libres** 16
Problemas 21
1.4 **Espacio vectorial euclídeo** 23
1.5 **Componentes rectangulares de un vector** 27
Problemas 31

2 Vectores deslizantes

2.1 **Introducción** 35
2.2 **Vectores deslizantes** 35
2.3 **Momento de un vector deslizante** 35
2.4 **Sistemas de vectores deslizantes** 39
2.5 **Eje central** 43
2.6 **Par de vectores** 45
2.7 **Sistemas de vectores deslizantes coplanario** 47
2.8 **Reducción de sistemas de vectores deslizantes** 48
2.9 **Centro de vectores paralelos** 50
Problemas 53

3 Cinemática de la partícula

3.1 **Introducción** 61
3.2 **Magnitudes fundamentales del movimiento** 61
3.3 **Caracterización geométrica de la trayectoria** 66
3.4 **Ecuaciones del movimiento** 68

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

3.5 Movimiento rectilíneo 69
3.5.1 Clases de movimiento rectilineo 69
3.5.2 Aceleración constante 70
3.5.3 Aceleración función del tiempo 74
3.5.4 Aceleración función de la posición 75
3.5.5 Aceleración función de la velocidad 76
3.5.6 Movimiento simultáneo de partículas 77
Problemas 79
3.6 Movimiento plano en coordenadas rectangulares 97
3.6.1 Componentes rectangulares de la aceleración 97
3.6.2 Movimiento parabólico 99
Problemas 103
3.7 Movimiento plano en coordenadas polares 111
3.7.1 Coordenadas polares 111
3.7.2 Componentes polares de la aceleración 112
3.7.3 Velocidad y aceleración angular 114
3.7.4 Movimiento circular 115
3.8 Movimiento plano en función del arco 116
3.8.1 Curvatura de una curva plana 117
3.8.2 Componentes intrínsecas de la aceleración 118
Problemas 121
3.9 Movimiento plano en referencias móviles 129
3.9.1 Referencias en traslación: transformación de Galileo ... 129
3.9.2 Referencias en rotación 131
3.9.3 Aceleración de Coriolis 132
3.9.4 Movimiento general 133
3.9.5 Movimiento de la partícula en la superficie terrestre 134
Problemas 137

4 Cinemática del sólido rígido

4.1 Introducción 147
4.2 Movimientos elementales del sólido rígido 147
4.2.1 Movimiento de traslación 148
4.2.2 Movimiento de rotación 149
4.2.3 Movimiento helicoidal 154
Problemas 155

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

4.3 Movimiento plano del sólido rígido 159
4.3.1 Definición cinemática del movimiento plano 159
4.3.2 Velocidad de los puntos del sólido 160
4.3.3 Centro instantáneo de velocidades 162
4.3.4 Aceleración de los puntos del sólido 164
4.3.5 Centro instantáneo de aceleraciones 166
4.3.6 Movimiento plano en referencias móviles 168
Problemas 175

5 Fundamentos de la Mecánica

5.1 Introducción 191
5.2 Masa y densidad 192
5.3 Concepto de fuerza 193
5.4 Leyes de Newton de la mecánica 194
5.5 Ley de la atracción universal : peso de un cuerpo 195
5.6 Centro de gravedad de sólidos 197
5.7 Teoremas de Pappus-Guldin 201
Problemas 205

6 Fuerzas y equilibrio

6.1 Introducción 209
6.2 Principios de la estática: sólido libre 209
6.3 Fuerza de rozamiento estático 212
6.4 Rozamiento en cuñas, tornillos y correas 216
6.5 Resistencia a la rodadura 222
Problemas 225
6.6 Componentes de un fuerza 235
6.7 Momento de una fuerza 236
6.8 Par de fuerzas 239
Problemas 241
6.9 Reducción de sistemas de fuerzas concurrentes 247
6.9.1 Equilibrio de fuerzas coplanarias concurrentes 249
6.10 Reducción de sistemas de fuerzas paralelas 250
6.10.1 Equilibrio de fuerzas coplanarias paralelas 251
6.11 Reducción de sistemas de fuerzas que se cruzan 251
6.11.1 Equilibrio de fuerzas coplanarias que se cruzan 255

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

6.12 Equilibrio de tres fuerzas coplanarias 257
6.13 Equilibrio de sistemas de sólidos 258
6.14 Reacciones vinculares en sistemas planos 259
Problemas 261
6.15 Equilibrio de armaduras y entramados 281
Problemas 285

7 Trabajo virtual y equilibrio

7.1 Introducción 295
7.2 Trabajo de una fuerza 295
7.3 Método del trabajo virtual 298
7.4 Equilibrio de sistemas ideales 298
7.5 Sistemas con elementos elásticos y rozamiento 304
7.6 Energía potencial y equilibrio 308
7.7 Estabilidad del equilibrio 312
Problemas 315

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Capítulo 1 Vectores libres

1.1 Introducción

En el estudio de los fenómenos naturales es preciso definir magnitudes físicas cuyos valores están asociados a elementos matemáticos. Ciertas magnitudes físicas, tales como la densidad, la temperatura, la presión, la energía, etc., quedan completamente definidas por un número real. Estas magnitudes se denominan escalares. Hay otras magnitudes físicas en cambio, tales como la velocidad, la fuerza o el momento cinético, que no quedan definidas únicamente con un valor numérico, es necesario darles además una dirección. Tales magnitudes se denominan vectoriales.

Los fenómenos naturales tienen lugar en el espacio físico, al cual se le asigna una geometría determinada. A partir de resultados experimentales se pone de manifiesto que la geometría euclídea proporciona una descripción extraordinariamente precisa para la determinación de magnitudes tales como distancias, áreas o ángulos en un amplio margen de escalas que van de 10^{-13} cm hasta 10^{28} cm. Así pues, el marco más adecuado para la descripción de las leyes físicas es el de un espacio euclídeo tridimensional. Este espacio es plano, y en él, la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a 180°.

Antes de iniciar el estudio de la Mecánica, cuyas leyes se formulan mediante ecuaciones entre magnitudes vectoriales, se introduce el concepto del vector como elemento unitario del espacio euclídeo y se definen operaciones con los vectores las cuales son de aplicación general.

1.2 Vectores libres

Definiremos un vector en el espacio euclídeo como un segmento orientado. Si los puntos extremos del segmento los designamos por A y B, el vector queda definido por su origen A y su extremo B y lo indicaremos por el símbolo $\overrightarrow{AB}$. Gráficamente se representa por medio de una flecha con origen en A y extremo en B que nos define el sentido. La longitud del segmento se denomina módulo del vector y se representa por $\overline{AB}$. El valor del módulo depende de la unidad elegida para medir distancias. Para representar un vector se utiliza también una notación más simplificada que consiste en un solo carácter en negrita tal como **A** o **a**. En este caso, su módulo se representa por la letra correspondiente entre dos segmentos verticales que se hace igual a la misma letra en cursiva, $|\mathbf{A}| = A$. La letra puede ser tanto mayúscula como minúscula, $|\mathbf{b}| = b$. La representación gráfica en este caso será una flecha sin asignar letras específicas al origen y al extremo del segmento, figuras 1-1 y 1-2.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Fig. 1-1

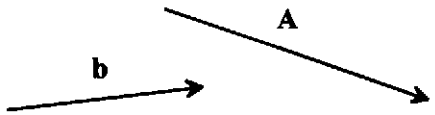


Fig. 1-2

Dos vectores se llaman *equivalentes* cuando tienen la misma dirección, sentido y módulo, es decir, uno de ellos puede hacerse coincidir con el otro mediante una traslación. Los vectores del espacio se pueden separar en clases de vectores equivalentes. Un vector cualquiera de una clase es el representante de dicha clase y se le denomina *vector libre*. En el espacio hay infinitos vectores libres. Se denomina vector nulo **0**, aquel cuyo origen y extremo coinciden en el mismo punto del espacio. El vector nulo carece de dirección y sentido, y su módulo es cero. A los vectores cuyo módulo es la unidad se les denomina vectores unitarios o versores.

1.3 Operaciones con vectores libres

Sean **a** y **b** dos vectores libres cualesquiera y *P* un punto dado del espacio, figura 1-3. Sus equivalentes en *P* son los vectores definidos por los segmentos *PQ* y *PR*, paralelos respectivamente a cada uno de ellos y de la misma longitud, luego $\overrightarrow{PQ}$ = **a** y $\overrightarrow{PR}$ = **b**. El paralelogramo *PQRS* se denomina paralelogramo sustentado por los vectores **a** y **b**, o simplemente, el paralelogramo definido por los dos vectores. Los segmentos *RS* y *QS* definen los vectores $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{QS}$ equivalentes a los vectores **a** y **b** respectivamente, figura 1-3.

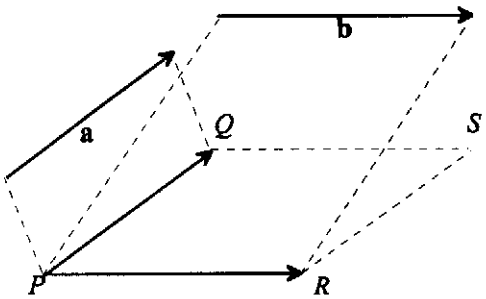


Fig. 1-3

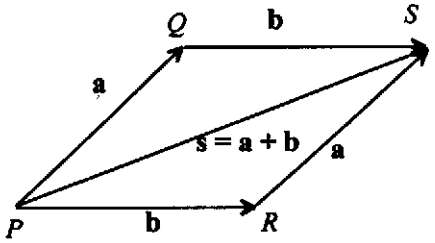


Fig. 1-4

Suma. Se denomina suma de los vectores **a** y **b** al vector **s** = **a** + **b**, definido por el segmento *PS* colocando los vectores uno a continuación del otro, figura 1-4. Del paralelogramo de los vectores **a** y **b** se deduce que la suma es conmutativa

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

Fácilmente se puede ver que la suma de vectores es asociativa como se muestra gráficamente en la figura 1-5, es decir, se cumple la igualdad

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} \qquad (1\text{-}1)$$

Dos vectores tales que tengan la misma dirección y el mismo módulo pero sentidos opuestos se denominan *vectores opuestos*. El opuesto a un vector dado **a** se designa como $-\mathbf{a}$ y la suma de ambos es el vector $\mathbf{0}$, $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, figura 1-6. Se define la *diferencia* de dos vectores como la suma del primero con el opuesto del segundo, figura 1-7.

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} - \mathbf{b}$$

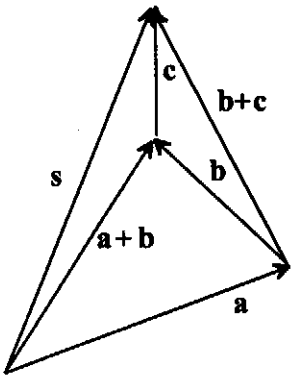


Fig. 1-5

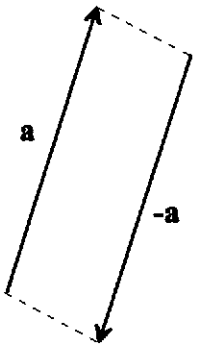


Fig. 1-6

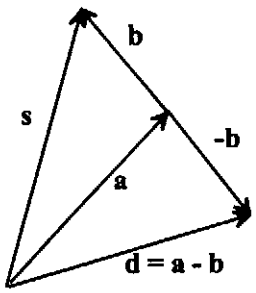


Fig. 1-7

Producto por escalares. Si k es un número real cualquiera y **a** un vector libre, el producto de $k\,\mathbf{a}$ es un vector libre que tiene la misma dirección que **a**, el mismo sentido o el opuesto según que $k > 0$ o $k < 0$, y su módulo es k veces el módulo de **a**. El producto por escalares es distributivo respecto de la suma $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\,\mathbf{a} + k\,\mathbf{b}$. El conjunto de vectores libres tiene estructura de *espacio vectorial*. La operación interna es la suma y la externa el producto por escalares. Además de la suma y el producto por escalares, con los vectores se pueden definir, entre otras, dos importantes operaciones denominadas *producto escalar* y *producto vectorial*.

Producto escalar. Se define el producto escalar de dos vectores **a** y **b** como el escalar que se obtiene de multiplicar el producto de los módulos de los dos vectores por el coseno del ángulo que forman. El producto escalar se designa con un punto entre los vectores.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a\, b \cos\theta \qquad (1\text{-}2)$$

De su definición se deduce que el producto escalar es conmutativo, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$. El producto escalar es distributivo respecto de la suma, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, y de la definición se deduce que el producto escalar de un vector **a** por sí mismo es el módulo del vector al cuadrado, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$. Geométricamente, el producto escalar de dos vectores es el producto del módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él, figura 1-8.

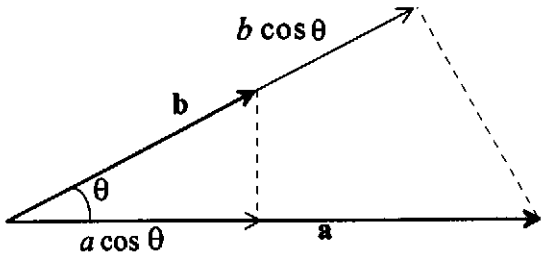


Fig. 1-8

Cuando el producto escalar de dos vectores no nulos es cero, el ángulo que forman es igual a 90°; es decir, los vectores son perpendiculares entre sí.

Producto vectorial. Dados dos vectores cualesquiera **a** y **b**, su producto vectorial se define como el vector **c** cuya ***dirección*** *es perpendicular al plano definido por los vectores,* su ***sentido*** *es el de avance de un sacacorchos que gira para ir del primer al segundo por el camino angular más corto,* y su ***módulo*** *el producto de los módulos por el seno del ángulo que forman,* $c = a\, b$ sen θ. El símbolo que representa la operación producto vectorial es el de un ángulo con el vértice hacia arriba ∧. Así, el producto vectorial del vector **a** por el vector **b** se representa por

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c} \qquad (1\text{-}3)$$

El producto vectorial tiene las siguientes propiedades:

El producto vectorial no es conmutativo	$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$
El producto vectorial de un vector por sí mismo es cero	$\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{0}$
El producto vectorial no es asociativo	$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}$
El producto vectorial es distributivo respecto de la suma	$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}$
El producto vectorial es asociativo respecto del producto	$k(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = k\,\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge k\,\mathbf{b}$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Fácilmente se puede deducir que el módulo del producto vectorial de dos vectores $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}|$ es el área del paralelogramo definido por los dichos vectores, figura 1-9.

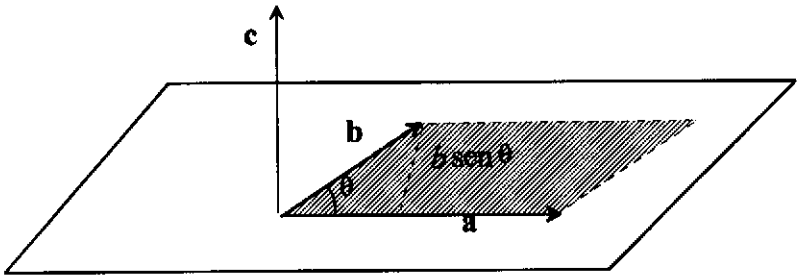


Fig. 1-9

Producto mixto. Dados tres vectores **a**, **b** y **c**, se define el producto mixto como el producto escalar de uno de ellos por el producto vectorial de los otros $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$. Esta es una operación derivada de las dos anteriormente definidas, las cuales permiten obtener inmediatamente el resultado del producto mixto. Operando se tiene,

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}|\cos\theta = a\,b\,c\,\text{sen}\,\alpha\,\cos\theta \qquad (1\text{-}4)$$

Cuando el producto mixto de tres vectores no nulos $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$ es cero, el vector **a** es perpendicular al producto vectorial de los otros dos, lo que indica que los tres vectores son coplanarios. Geométricamente el producto mixto de tres vectores representa el volumen de paralepípedo definido por los tres vectores, tal como se muestra en la figura 1-10.

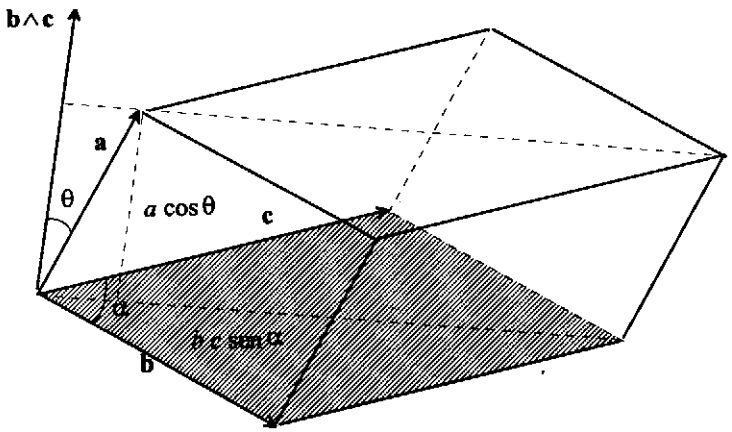


Fig. 1-10

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

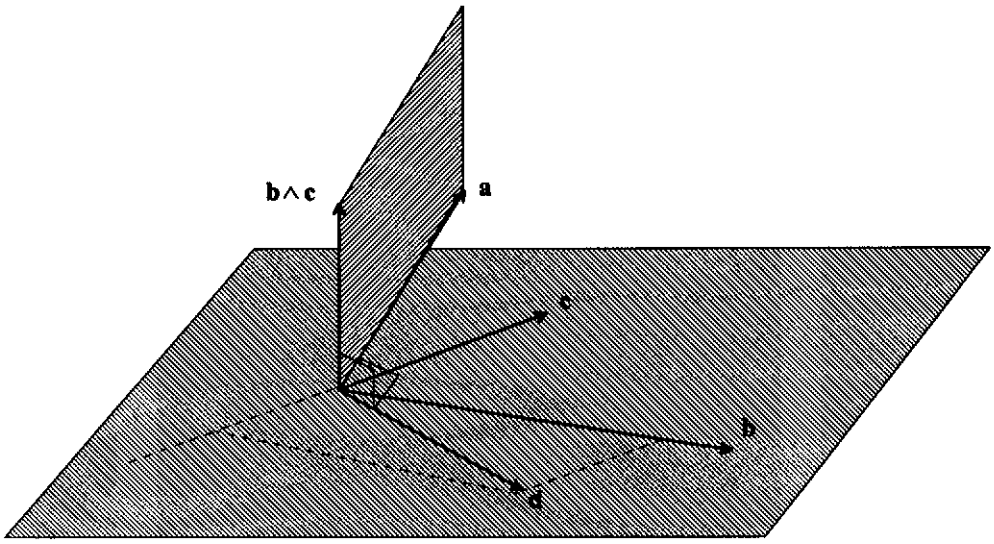
www.elsolucionario.net

De la interpretación geométrica , fácilmente se deduce que el producto mixto satisface la siguiente relación

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a})$$

Doble producto vectorial. Dados tres vectores **a**, **b** y **c**, se define el *doble producto vectorial* como, el producto vectorial de uno de ellos, por el producto vectorial de los otros dos

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$$



El doble producto vectorial, es un vector perpendicular al vector $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$, luego es coplanario con **b** y **c**, y es por tanto, una combinación lineal de ellos $\mathbf{d} = k_1 \mathbf{b} + k_2 \mathbf{c}$.

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \qquad (1\text{-}5)$$

Se deja como ejercicio demostrar que el valor de los coeficientes de la combinación lineal son los productos escalares que se indican en la ecuación (1-5).

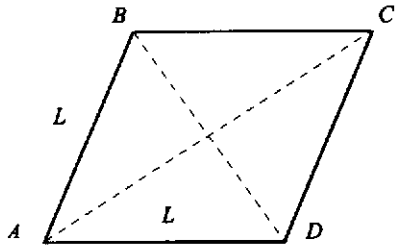
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 1.1

Utilizar los datos de la figura adjunta para demostrar vectorialmente que las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí



SOLUCIÓN

Sea el rombo de lado L definido por los puntos A, B , C y D. Sus diagonales son los segmentos AC y BD. Las diagonales en forma vectorial se pueden poner como suma de los vectores definidos por los lados del rombo

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$

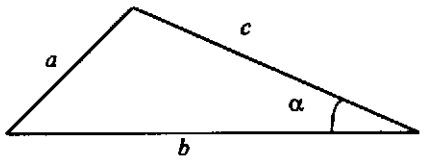
Los cuatro vectores de las ecuaciones anteriores tienen el mismo módulo que es el lado L del rombo. Efectuando el producto escalar de las diagonales se tiene

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}) = L^2 - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC}\,\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AD} - L^2 = 0$$

Ya que el producto escalar de los vectores definidos por las diagonales es igual a cero, éstas son perpendiculares, tal como se quería demostrar.

PROBLEMA 1.2

Demostrar vectorialmente el teorema del coseno cuyo enunciado es : en el triángulo de lados $a,b,c,$ de la figura adjunta , un lado cualquiera a cumple que $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos\alpha$



SOLUCIÓN

Formemos con los lados del triángulo la suma vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$. Efectuando el producto escalar de

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

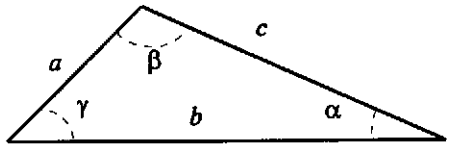
a por sí mismo se tiene $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$; y desarrollando el segundo término de la ecuación queda $a^2 = b^2 + c^2 + 2\,b\,c \cos(180 - \alpha)$, de donde $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos\alpha$ tal como se quería demostrar.

PROBLEMA 1.3

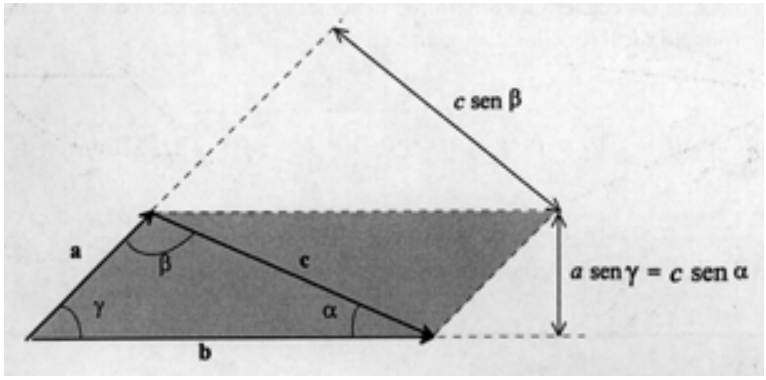
Demostrar vectorialmente la ley del seno cuyo enunciado es: en un triángulo de lados *a,b,c,* se cumple que cada lado es proporcional al seno del ángulo que tiene en frente

SOLUCIÓN

Consideremos el triángulo de la figura adjunta.



Construyamos sobre el triángulo los vectores **a**, **b** y **c**, tal como se ve en la figura siguiente.



De la definición del producto vectorial de dos vectores se deduce que los tres productos vectoriales $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ y $\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}$, son iguales. El valor común del módulo de los tres productos vectoriales es el área del rectángulo rayado en la figura. Escribiendo los módulos de cada uno de los vectores se tiene

$$|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = a\,b \operatorname{sen}\gamma \qquad |\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}| = b\,c \operatorname{sen}\alpha \qquad |\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}| = c\,a \operatorname{sen}\beta$$

Igualando sus expresiones queda la identidad $a\,b \operatorname{sen}\gamma = b\,c \operatorname{sen}\alpha = a\,c \operatorname{sen}\beta$. Dividiendo la identidad anterior por el producto de los módulos de los tres vectores que define el triángulo a b c, se tiene el enunciado

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

1.4 Espacio vectorial euclídeo

El conjunto de los vectores definidos en el espacio euclídeo tridimensional tienen estructura de espacio vectorial. Se denomina *base* del espacio vectorial a tres vectores cualesquiera **a**, **b** y **c** linealmente independientes. Tres vectores son linealmente independientes cuando la ecuación lineal $k_1\,\mathbf{a} + k_2\,\mathbf{b} + k_3\,\mathbf{c} = \mathbf{0}$ se satisface si, y sólo si, los escalares k_i i = 1, 2, 3, cumplen $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Los vectores **a**, **b** y **c** forman una base del espacio vectorial euclídeo tridimensional.

Las propiedades de las operaciones suma y producto por escalares permiten que cualquier vector del espacio vectorial se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de la base $\mathbf{d} = p\,\mathbf{a} + m\,\mathbf{b} + n\,\mathbf{c}$. Los tres escalares ($p$, m, n) son las componentes del vector **d** en la base **a**, **b**, **c**, figura 1-11.

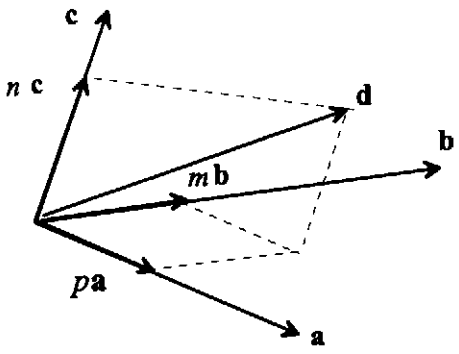


Fig. 1-11

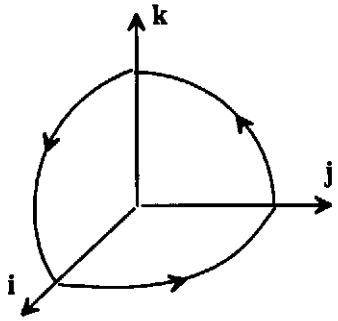


Fig. 1-12

Cuando los tres vectores de la base son unitarios y mutuamente perpendiculares entre sí, la base se denomina ortonormal, figura 1-12. La nomenclatura comúnmente empleada para los vectores de la base ortonormal es **i**, **j**, **k**. Por definición los vectores de la base **i**, **j**, **k** tienen de módulo uno y son perpendiculares entre sí, luego cumplen las condiciones de ortonormalidad $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$ y $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0$.

La base se denomina directa cuando $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}$, es decir, cuando mediante giros de 90° en el sentido contrario al de las agujas del reloj se hace coincidir el vector **i** con el vector **j**, y éste con el **k**, sea cual sea la orientación que tenga el vector **i**.

Matriz de cambio de base. En el espacio vectorial euclídeo hay infinitas bases ortonormales. Sea $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ otra base ortonormal directa. Cada uno de los vectores de la nueva base se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de la base **i**, **j**, **k**, y se tiene

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$\mathbf{e}_1 = e_{11}\mathbf{i} + e_{12}\mathbf{j} + e_{13}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{e}_2 = e_{21}\mathbf{i} + e_{22}\mathbf{j} + e_{23}\mathbf{k} \qquad \text{(a)}$$

$$\mathbf{e}_3 = e_{31}\mathbf{i} + e_{32}\mathbf{j} + e_{33}\mathbf{k}$$

Un vector **s** cualquiera del espacio vectorial puede ser expresado como una combinación lineal de los vectores de la nueva base $\mathbf{d} = p\mathbf{e}_1 + q\mathbf{e}_2 + r\mathbf{e}_3$, o como una combinación lineal de los vectores de la base vieja $\mathbf{d} = d_1\mathbf{i} + d_2\mathbf{j} + d_3\mathbf{k}$. Teniendo en cuenta las tres ecuaciones (a), se deduce que las componentes del vector en ambas bases están relacionados por las ecuaciones

$$d_1 = pe_{11} + qe_{21} + re_{31}$$

$$d_2 = pe_{12} + qe_{22} + re_{32} \qquad \text{(b)}$$

$$d_3 = pe_{13} + qe_{23} + re_{33}$$

Estas tres ecuaciones se pueden sustituir por una única ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \qquad \text{(1-6)}$$

La matriz cuadrada (e_{ij}) $i, j = 1, 2, 3$ se denomina *matriz de cambio de base* y su determinante vale 1, $det\ (e_{ij}) = 1$. Las matrices con determinante igual a 1 tienen inversa y esta coincide con la matriz traspuesta.

En efecto, el producto de una matriz por su inversa es, por definición de inversa, la matriz identidad I cuyo determinante es 1 y cuyos elementos son todos ceros, excepto los de la diagonal principal que son unos.

$$(e_{ij})^{-1}\,(e_{ij}) = I$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

La matriz traspuesta de una dada se obtiene cambiando filas por columnas, lo que no altera el valor de su determinante. Si $(e_{ij})'$ es la traspuesta de (e_{ij}), entonces $det\ (e_{ij})' = 1$, y se cumple

$$(e_{ij})'\,(e_{ij}) = I$$

De ambas ecuaciones se deduce que la inversa coincide con la traspuesta $(e_{ij})^{-1} = (e_{ij})'$. Este resultado permite pasar fácilmente de unas componentes a otras. Las componentes del vector **d** en la base **i**, **j** y **k**, (d_1, d_2, d_3) están relacionadas con sus componentes (p, q, r) en la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ por las tres ecuaciones (b), que en su forma matricial es la ecuación (1-6). Multiplicando por la izquierda la ecuación (1-6) por la inversa de la matriz del cambio de base, se obtiene

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \qquad (1\text{-}7)$$

Este resultado permite poder calcular fácilmente las componentes de un vector en una base ortonormal cualquiera conociendo sus componentes en otra base ortonormal dada, lo que justifica la preferente utilización de bases ortonormales frente a las que no lo son, siempre que esto sea posible.

Coordenadas cartesianas. Tomando el origen de los vectores **i**, **j**, **k** en un punto arbitrario O del espacio, las tres rectas definidas por los vectores de la base junto con el punto O son las aristas del triedro definido por los tres vectores, las cuales se denominan ejes. La posición de un punto del espacio P respecto del origen O queda unívocamente determinado por la terna de números reales (x, y, z) cuyos valores son las longitudes de los siguientes segmentos

$$OP_1 = x \qquad OP_2 = y \qquad OP_3 = z$$

donde P_1, P_2 y P_3 son las proyecciones de P sobre los ejes y su signo es positivo cuando el sentido es el mismo que el de los vectores de la base y negativo si es opuesto. La terna de valores (x, y, z) son las *coordenadas cartesianas* del punto P, figura 1-13. Las rectas paralelas a los ejes pasando por el punto P se denominan *curvas coordenadas* en P. Se definen con la condición de que dos de las tres coordenadas sean constantes. La curva coordenada paralela al eje OX es $y = \text{cte}$, $z = \text{cte}$, es decir, la recta intersección de ambos planos.

La base local en P está formada por los vectores tangentes unitarios a las curvas coordenadas en P y dirigidos en sentido positivo el sentido creciente de la coordenada variable.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Para las coordenadas cartesianas estos vectores en P son equivalentes a **i, j, k**.

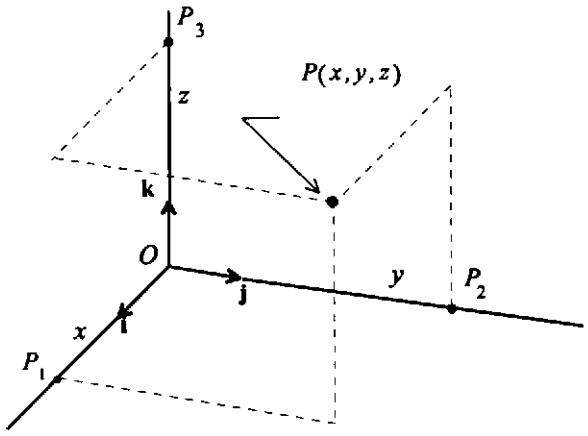


Fig. 1-13

La base local de las coordenadas cartesianas es un invariante espacial. Este hecho representa una gran ventaja en la utilización de las coordenadas cartesianas frente a otros sistemas de coordenadas, como por ejemplo, las coordenadas esféricas, las cilíndricas, las polares, etc., los cuales también generan bases ortonormales, pero a diferencia de las coordenadas cartesianas, la base local no es un invariante espacial ya que su orientación cambia de un punto a otro del espacio.

La simplificación que representa la invariancia de la base facilita el estudio teórico del comportamiento de los sistemas físicos pero, en muchos casos, el desarrollo de un determinado problema en coordenadas cartesianas presenta una gran complejidad de cálculo, lo que dificulta o incluso impide la obtención o la interpretación de resultados y, por lo tanto, debe ser estudiado utilizando otro sistema de coordenadas más adecuado.

Espacio vectorial bidimensional. Los vectores **c**, tales que sean combinación lineal de dos vectores dados **a** y **b**, forman un subespacio vectorial de dimensión dos, figura 1-14.

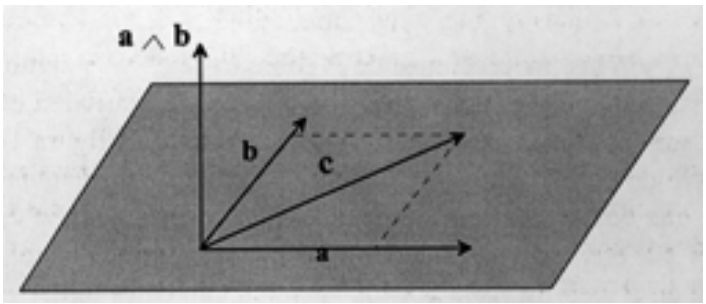


Fig. 1-14

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Los tres vectores **a**, **b** y **c** son coplanarios, luego el producto vectorial de dos de ellos, $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, es un vector perpendicular al plano que los contiene y, por tanto, el producto mixto de los tres vectores es nulo

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 0 \tag{1-8}$$

La ecuación (1-8) es la condición necesaria y suficiente para que tres vectores sean coplanarios. Cualquier par de vectores del plano que no sean proporcionales forman una base del espacio bidimensional. Una base ortonormal estará formada por los vectores **i** y **j**. Los ejes definidos por los vectores **i**, **j** aplicados en un punto 0 del plano forman un sistema de coordenadas cartesianas planas. Las coordenadas (x, y) de un punto P quedan determinadas por las proyecciones de P sobre los ejes, figura 1-15.

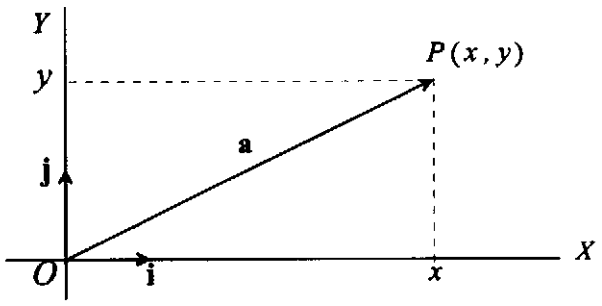


Fig. 1-15

Los vectores del plano, tomados con su origen en el origen de coordenadas, tienen dos componentes rectangulares $\mathbf{a} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ que coinciden con las coordenadas del punto extremo del vector.

Vectores y magnitudes físicas. Las magnitudes físicas *escalares* son aquellas cuyos valores no dependen del sistema de coordenadas. Son escalares, por ejemplo, la temperatura, la presión, la masa, etc. Un vector es una magnitud que define una dirección en el espacio y que tiene un módulo. Ambas propiedades tampoco dependen del sistema de coordenadas. La velocidad **v** y la fuerza **F**, entre otras, son magnitudes físicas vectoriales. Los vectores que representan estas magnitudes en puntos distintos del espacio y en instantes de tiempo diferentes pueden ser comparados, ya que los vectores no están ligados a posiciones concretas del espacio y éste, hasta donde experimentalmente se puede determinar, es plano.

No todas las magnitudes que tienen asociada una dirección y un módulo son necesariamente magnitudes vectoriales. Para que una magnitud física pueda ser representada mediante un vector ha de tener: a) *módulo, dirección y sentido independientes del sistema de coordenadas* y b) *debe satisfacer la ley de la suma de vectores.*

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Un ejemplo de magnitud física que tiene dirección sentido y módulo, pero que no es una magnitud vectorial, son las rotaciones finitas de un sólido. Veamos un sencillo ejemplo en el cual no se cumple la propiedad conmutativa de la suma de vectores. Supongamos que situamos un cubo cuyas caras están numeradas del 1 al 6 con las aristas paralelas a los ejes de un sistema de coordenadas rectangulares y efectuamos dos rotaciones consecutivas de amplitud 90°, una por ejemplo alrededor del eje x y otra alrededor del eje y, ambas en el sentido de las agujas del reloj. Cada rotación tiene dirección, sentido y módulo, y, por tanto, se puede considerar que es una magnitud *vectorial*. Pero fácilmente se puede comprobar que la disposición final del cubo es diferente dependiendo de que primero se haga la rotación respecto del eje x seguida de la rotación respecto del eje y o de que se efectúe primero la rotación respecto de y seguida de la rotación respecto de x. En definitiva, las rotaciones finitas de un sólido no satisfacen la propiedad conmutativa de la suma de vectores y, por lo tanto, no son magnitudes vectoriales.

1.5 Componentes rectangulares de un vector

Sean P y Q dos puntos cualesquiera del espacio euclídeo tridimensional y sean (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) sus respectivas coordenadas en la referencia indicada en la figura 1-16.

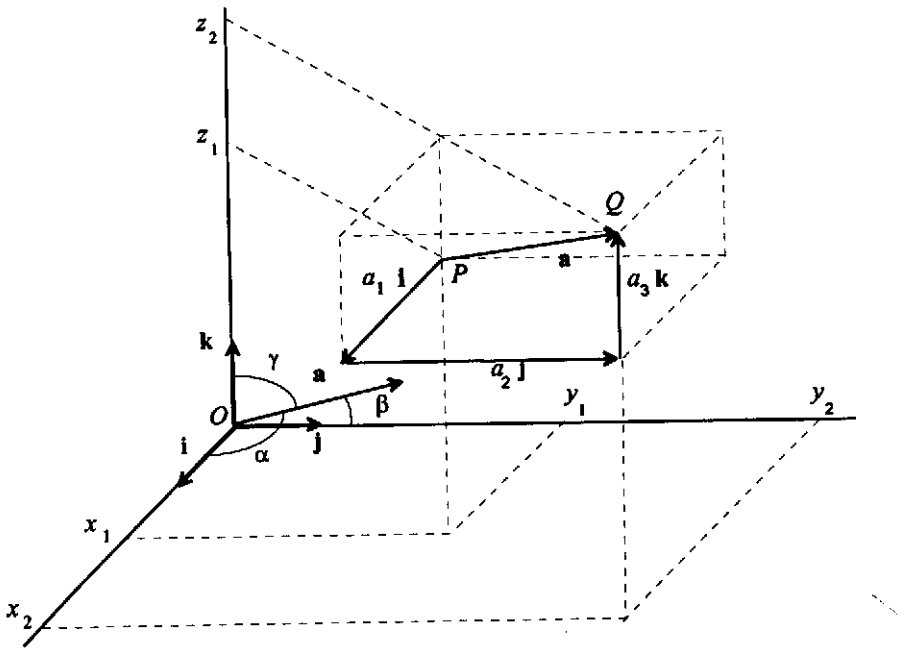


Fig. 1-16

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Designemos por **a** al vector definido por ambos puntos cuyo origen es el punto P y su extremo el punto Q. La expresión del vector genérico **a** como una combinación lineal de los vectores de la base es $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$. Los escalares a_1, a_2 y a_3 son las *componentes rectangulares* del vector **a**.

Se deduce inmediatamente que los valores de las componentes rectangulares de **a** se obtiene de las coordenadas de los puntos P y Q origen y extremo respectivamente del vector, y sus valores son: $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$. Las componentes rectangulares de un vector son las diferencias de las coordenadas correlativas del punto extremo menos la del punto origen. Si el origen del vector coincide con el origen de coordenadas, sus componentes rectangulares son las coordenadas del punto extremo del vector.

Veamos como se expresan la dirección y el módulo a del vector en componentes. La dirección queda definida por los *cosenos directores*, que son los cosenos de los ángulos que dicho vector forma con los vectores de la base.

De la definición de producto escalar se tiene

$$a_1 = \mathbf{i}\cdot\mathbf{a} = a\cos\alpha \qquad a_2 = \mathbf{j}\cdot\mathbf{a} = a\cos\beta \qquad a_3 = \mathbf{k}\cdot\mathbf{a} = a\cos\gamma$$

Igualando y despejando se tienen que los cosenos directores de **a** están dados por

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{a} \qquad \cos\beta = \frac{a_2}{a} \qquad \cos\gamma = \frac{a_3}{a} \tag{1-9}$$

Elevando al cuadrado y sumando se obtiene la ecuación que relaciona los cosenos directos

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{1-10}$$

El *módulo* del vector se obtiene sustituyendo las ecuaciones (1-9) en la ecuación (1-10) y despejando a queda

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{1-11}$$

Operaciones en componentes Las operaciones definidas anteriormente con los vectores libres como elementos unitarios de un espacio vectorial, se pueden expresar ahora en componentes.

Suma. El vector suma tiene por componentes la suma de los componentes correlativos de

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

cada uno de los sumandos. Si $\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, entonces

$$\mathbf{s} = (a_1 + b_1 + c_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2 + c_2)\mathbf{j} + (a_3 + b_3 + c_3)\mathbf{k}$$

Producto por escalares. El producto del escalar k por el vector $\mathbf{a}$ en componentes es

$$k\,\mathbf{a} = (k\,a_1)\mathbf{i} + (k\,a_2)\mathbf{j} + (k a_3)\mathbf{k}$$

Producto escalar. El producto escalar de dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Producto vectorial. El producto vectorial de dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = (a_2 b_3 - b_2 a_3)\mathbf{i} + (a_3 b_1 - b_3 a_1)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - b_1 a_2)\mathbf{k}$$

Producto mixto. El producto mixto de tres vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ es un número dado por el determinante de sus componentes

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 1.4

Demostrar que el determinante de la matriz de cambio de base ortonormal que aparece en la ecuación (1-6) es igual a 1.

SOLUCIÓN

Desarrollando el determinante de la matriz se tiene

$$det\ (e_{ij}) = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{vmatrix} = e_{11}\,e_{22}\,e_{33} + e_{21}\,e_{32}\,e_{13} + e_{31}\,e_{12}\,e_{23} - e_{31}\,e_{22}\,e_{13} - e_{21}\,e_{12}\,e_{33} - e_{11}\,e_{23}\,e_{32}$$

Agrupando términos queda

$$det\ (e_{ij}) = (e_{12}\,e_{23} - e_{22}\,e_{13})\,e_{31} + (e_{21}\,e_{13} - e_{23}\,e_{11})\,e_{32} + (e_{11}\,e_{22} - e_{21}\,e_{12})\,e_{33}$$

La base es directa, luego $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$. Esta ecuación vectorial es equivalente a las tres ecuaciones escalares siguientes

$$e_{12}\,e_{23} - e_{22}\,e_{13} = e_{31} \qquad e_{21}\,e_{13} - e_{23}\,e_{11} = e_{32} \qquad e_{11}\,e_{22} - e_{21}\,e_{12} = e_{33}$$

que sustituidas en la expresión del determinante queda

$$det\ (e_{ij}) = e_{31}^2 + e_{32}^2 + e_{33}^2$$

El segundo término de la ecuación es el módulo del vector $\mathbf{e}_3$ al cuadrado, cuyo valor es igual a 1 ya que es unitario, obteniendo entonces

$$det\ (e_{ij}) = 1$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 1.5

Sea $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$ la expresión de un vector en la base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Sean $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ los vectores de otra base ortonormal directa tal que se cumple $\mathbf{i} \cdot \mathbf{e}_1 = 1/2$; $\mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_2 = \sqrt{3}/3$; $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_3 = 1$. Calcular las componentes de $\mathbf{A}$ en la nueva base.

SOLUCIÓN

Para calcular las componentes del vector **A** en la nueva base hay que determinar los elementos de la matriz de cambio de base que son las componentes de los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ en la base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.
De los datos del problema se tiene $e_{11} = 1/2$; $e_{22} = \sqrt{3}/3$; $e_{33} = 1$. Los vectores son unitarios, por consiguiente, las componentes primera y segunda del vector $\mathbf{e}_3$ son iguales a cero, $e_{31} = e_{32} = 0$, ya que su tercera componente es igual a 1. El vector $\mathbf{e}_3$ coincide con el vector $\mathbf{k}$.

Del producto vectorial $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$ se deduce que $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son coplanarios con los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$, por lo que sus terceras componentes son nulas, $e_{13} = e_{23} = 0$.

De las ecuaciones de normalización $\qquad e_{11}^2 + e_{12}^2 = 1 \quad ; \quad e_{21}^2 + e_{22}^2 = 1$

y teniendo en cuenta los valores de e_{11} y de e_{22}, se deduce el valor de las componentes

$$e_{12} = \sqrt{3}/2 \quad \text{y} \quad e_{21} = -\sqrt{3}/2$$

La matriz de cambio de base es

$$(e_{ij}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y de la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = (e_{ij})^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

se obtienen las componentes del vector **A** en la base nueva cuyos valores son

$$a_1 = \tfrac{1}{2} + \sqrt{3} \quad ; \quad a_2 = 1 - \sqrt{3} \quad ; \quad a_3 = 1$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 1. 6

Demostrar que los vectores $\mathbf{A} = 3\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 4\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} - 6\,\mathbf{k}$ forman un triángulo. Determinar el valor de sus ángulos.

SOLUCIÓN

Para que tres vectores formen un triángulo se ha de cumplir que uno de ellos sea la suma de los otros dos o que la suma de todos ellos sea igual a cero. Con los datos del enunciado se tiene que $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ forman un triángulo. La longitud de los lados del triángulo son los módulos de los vectores

$$a = |\mathbf{A}| = \sqrt{14} \qquad b = |\mathbf{B}| = \sqrt{26} \qquad c = |\mathbf{C}| = \sqrt{56}$$

Del módulo del producto vectorial de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{B}$ se tiene $|\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}| = ab\,\text{sen}(180 - \gamma)$

El producto vectorial del primer término de la ecuación es el vector $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = 10\,(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$. Sustituyendo valores y despejando se tiene

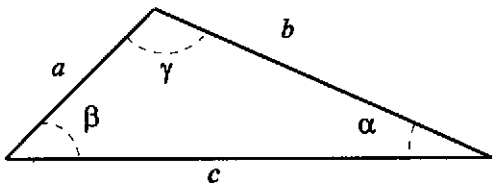
$$\text{sen}\,(180 - \gamma) = 0.90785 \qquad \text{de donde} \qquad \gamma = 114.79^\circ$$

De la ley del seno se obtienen los valores de los senos de los otros dos ángulos

$$\text{sen}\,\alpha = 0.45393 \qquad \text{y} \qquad \text{sen}\,\beta = 0.61859$$

de donde

$$\alpha = 27.0^\circ \qquad \text{y} \qquad \beta = 38.21^\circ$$



© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 1.7

Sean los vectores $\mathbf{A} = 4\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$. Determinar:
a) el ángulo que forman
b) el valor de m para que el vector $\mathbf{C} = 3\,\mathbf{i} + m\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$ sea coplanario con **A** y **B**
c) expresar **C** como una combinación lineal de **A** y **B**

SOLUCIÓN

a) El ángulo que forman dos vectores está dado por

$$\cos\theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{A\,B}$$

Sustituyendo valores se tiene

$$\cos\theta = \frac{13}{5\sqrt{14}} \qquad \theta = 46.0$$

b) Para que tres vectores sean coplanarios se ha de cumplir que su producto mixto sea nulo

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = 0$$

Sustituyendo valores queda $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = 18 - 8\,m + 18 = 0$. De donde

$$m = \frac{9}{2}$$

c) La expresión de **C** en función de **A** y **B** es de la forma $\mathbf{C} = k_1\,\mathbf{A} + k_2\,\mathbf{B}$, en donde k_1 y k_2 son dos coeficientes a determinar. Escribiendo la relación vectorial en componentes e identificando los coeficientes de los vectores de la base en ambos términos de la ecuación se tiene

$$4\,k_1 + k_2 = 3 \qquad 2\,(k_1 + k_2) = 3 \qquad k_2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad k_1 = 1/2 \quad \text{y} \quad k_2 = 1$$

sustituyendo queda

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2}\,\mathbf{A} + \mathbf{B}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Capítulo 2 Vectores deslizantes

2.1 Introducción

Algunas magnitudes físicas que tienen naturaleza vectorial, no quedan completamente determinadas sin especificar un punto del espacio por el cual ha de pasar la dirección definida por el vector que las representa. En estas condiciones, el vector representativo de dichas magnitudes no es un vector libre, y para que su acción no cambie, únicamente puede desplazarse a lo largo de la recta que pasa por el punto y cuya dirección es la del vector. Este tipo de vectores se denominan *vectores deslizante* y la recta que pasando por el punto, *recta soporte* del vector.

En este apartado se definen las operaciones básicas asociadas a ellos y se analizan las propiedades de los conjuntos de vectores deslizantes, obteniéndose resultados que proporcionan un potente y eficaz método para el estudio de la Estática, Cinemática y Dinámica de la partícula y del sólido rígido, que constituyen tres importantes apartados del contenido de la Mecánica Vectorial.

2.2 Vectores deslizantes

Se define el vector deslizante como un vector libre **A** cualquiera tal que su dirección pase por un punto fijo P del espacio. La recta definida por **A** y el punto P es la recta soporte del vector deslizante. Gráficamente, el vector **A** se representa en cualquier posición sobre su recta soporte. Para especificar un vector deslizante concreto es necesario dar las coordenadas del punto y las componentes del vector, es decir, seis valores, tres para fijar la posición del punto y tres para las componentes del vector. En todo lo que sigue en este Capítulo, y cuando no se produzca una confusión de conceptos, se omitirá el término deslizante al referirse a un vector genérico **A** pasando por un punto P.

2.3 Momento de un vector deslizante

Momento de un vector respecto de un punto. Sea **A** un vector deslizante y P un punto cualquiera de su recta soporte. Sea Q otro punto del espacio que no pertenece a la recta soporte del vector. El momento de **A** respecto del punto Q es un vector aplicado en Q obtenido del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y **A**, figura 2-1. De su definición se deduce que

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

el vector $\mathbf{M}_Q = \overrightarrow{QP} \wedge \mathbf{A}$ es perpendicular al plano definido por la recta soporte de **A** y el punto Q, y su módulo es

$$M_Q = |\mathbf{M}_Q| = \overline{PQ}\,|\mathbf{A}|\,\text{sen}\,\alpha = A\,d$$

siendo d la distancia del punto Q a la recta soporte del vector.

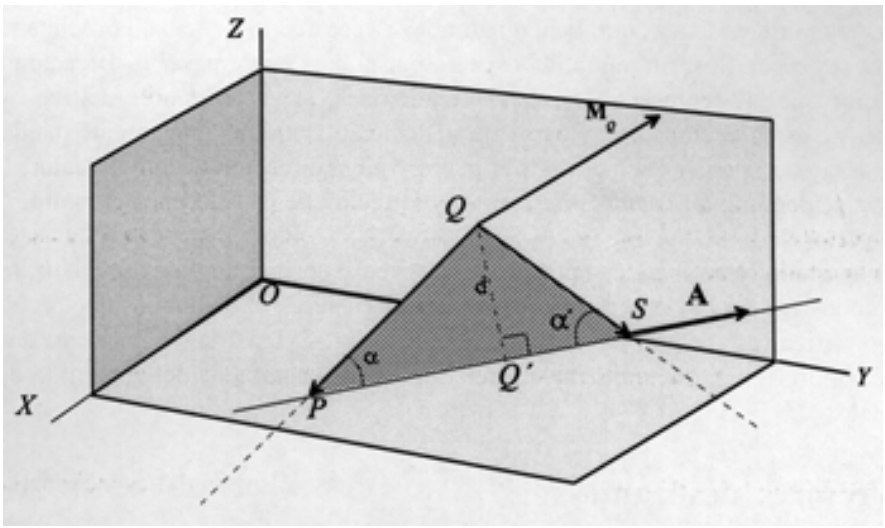


Fig. 2-1

Comprobamos que la definición es correcta, es decir, que el momento $\mathbf{M}_Q$ no depende de la elección del punto que se tome sobre la recta soporte para formar el producto vectorial. En efecto, sea S otro punto de la recta soporte. De la definición, el momento respecto de Q es ahora

$$\mathbf{M}_s = \overrightarrow{QS} \wedge \mathbf{A}$$

En el triángulo definido por los puntos $Q\ P\ S$ se cumple la relación vectorial $\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PS}$ que sustituida en la expresión de $\mathbf{M}_s$ queda

$$\mathbf{M}_s = (\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PS}) \wedge \mathbf{A} = \mathbf{M}_Q \qquad (2\text{-}1)$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

ya que el producto vectorial es $\overrightarrow{PS} \wedge \mathbf{A} = 0$ por ser vectores paralelos. Por tanto, se puede enunciar que *el momento del vector deslizante* **A** *respecto del punto Q es independiente del punto de la recta soporte que se elija para formar el producto vectorial.* Siempre que sea posible se elegirá el punto Q', pie de la perpendicular bajada de Q a la recta soporte del vector. El vector momento $\mathbf{M}_Q$ es un deslizante cuya recta soporte pasa por el punto Q.

Relación entre los momentos respecto de dos puntos. Veamos la relación que existe entre los momentos de un vector deslizante respecto de dos puntos cualesquiera del espacio. Sean C y D dos puntos del espacio no pertenecientes a la recta soporte del vector deslizante **A**, figura 2-2. Los momentos del vector **A** respecto de los puntos C y D están dados por

$$\mathbf{M}_C = \overrightarrow{CP} \wedge \mathbf{A} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{M}_D = \overrightarrow{DP} \wedge \mathbf{A}$$

Entre los puntos C, D y P se cumple la igualdad vectorial $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DP}$, que sustituída en la expresión de $\mathbf{M}_C$ y operando queda

$$\mathbf{M}_C = (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DP}) \wedge \mathbf{A} = \mathbf{M}_D + \overrightarrow{CD} \wedge \mathbf{A}$$

Los momentos del vector **A** respecto de dos puntos cualesquiera del espacio satisfacen la ecuación

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{M}_D + \overrightarrow{CD} \wedge \mathbf{A} \tag{2-2}$$

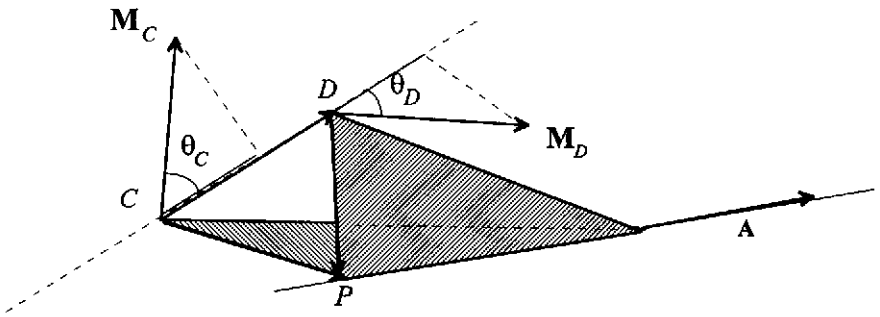


Fig. 2-2

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Un primer resultado que se deduce de la ecuación (2-2) es que si los punto C y D definen una dirección paralela a **A,** entonces el segundo sumando de la ecuación es nulo, por ser el producto vectorial de dos vectores paralelos, y queda los momentos respecto de C y D son iguales, $\mathbf{M}_C = \mathbf{M}_D$,es decir que el momento del vector **A** tiene el mismo valor respecto de todos los puntos de una recta paralela al vector. En consecuencia, *a cada recta del espacio paralela al vector deslizante* **A** *le corresponde un único momento.*

Otro resultado del momento de un vector respecto de dos puntos cualesquiera del espacio se obtiene de multiplicar escalarmente la ecuación 2-2 por el vector $\overrightarrow{CD}$. Teniendo en cuenta que el producto mixto de tres vectores, dos de los cuales son iguales es cero, queda que $\overrightarrow{CD} \cdot \mathbf{M}_C = \overrightarrow{CD} \cdot \mathbf{M}_D$ de donde $M_C \cos\theta_C = M_D \cos\theta$ es decir, las proyecciones de los momentos respecto de dos puntos no alineados con **A**, sobre la recta definida por dichos puntos, tienen el mismo valor, ver figura 2-2.

Momento de un vector respecto de un eje. Consideramos ahora un vector **A** cuya recta soporte pasa por P y un *eje* definido por el vector unitario **u** y el punto Q, al cual lo designaremos como eje definido por **u**. Sea $\mathbf{M}_Q$ el momento de **A** respecto de Q, figura 2-3. Se define el momento de **A** respecto del eje **u**, como el producto escalar del vector **u** por el momento $\mathbf{M}_Q$. El momento de **A** respecto del eje **u** es un escalar dado por

$$m_u = \mathbf{u} \cdot \mathbf{M}_Q = \mathrm{M}_Q \cos\theta \qquad (2\text{-}3)$$

es decir, su valor es la proyección del momento de **A** respecto del punto Q sobre el eje.

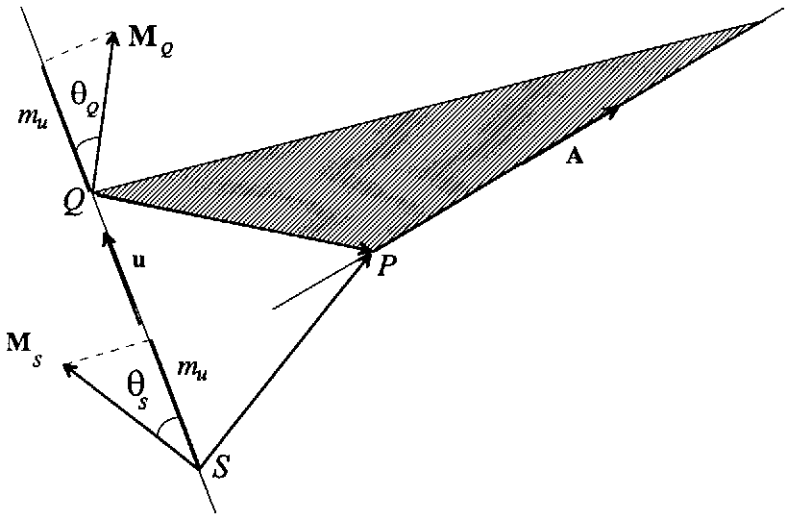


Fig. 2-3

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

El escalar m_u puede ser positivo o negativo según sea el valor del ángulo θ que forma el momento $\mathbf{M}_Q$ con el eje **u**. En el caso en que el vector **A** sea paralelo al eje **u**, el momento $\mathbf{M}_Q$, que es un vector perpendicular al vector **A**, también lo será respecto al vector **u**, y por tanto, el momento m_u de **A** respecto del eje será cero.

Veamos que la definición es correcta, es decir, que el momento m_u de **A** respecto del eje **u** es independiente del punto Q del eje respecto del cual se tome el momento del vector **A**. En efecto, sea S otro punto cualquiera del eje. El momento de **A** respecto del nuevo punto S es $\mathbf{M}_S = \overrightarrow{SP} \wedge \mathbf{A}$ y el momento de **A** respecto del eje es $m_u' = \mathbf{u} \cdot \mathbf{M}_S$. Utilizando la ecuación (2-2) que relaciona los momentos de **A** respecto de los puntos S y Q se tiene

$$\mathbf{M}_S = \mathbf{M}_Q + \overrightarrow{SQ} \wedge \mathbf{A}$$

y multiplicando escalarmente por **u** queda

$$m_u' = \mathbf{u} \cdot \mathbf{M}_S = \mathbf{u} \cdot \mathbf{M}_Q = m_u$$

pues el producto mixto $\mathbf{u} \cdot \overrightarrow{SQ} \wedge \mathbf{A} = 0$ ya que incluye dos vectores, **u** y $\overrightarrow{SQ}$ que son paralelos.

2.4 Sistemas de vectores deslizantes

Sean $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, ..., $\mathbf{A}_n$ un conjunto de vectores deslizantes cuyas rectas soportes pasan por los puntos P_1 , P_2 , ... , P_n , y supongamos que se conocen las componentes de los vectores y las coordenadas de los puntos. A un conjunto cualquiera de vectores, se le denomina genéricamente *sistema de vectores deslizantes*. Los elementos principales que caracterizan un sistema de vectores deslizantes son: la *resultante* y el *momento resultante* del sistema respecto de un punto del espacio.

Resultante. Se define la resultante del sistema como un vector **R** formado por la suma de los vectores equivalentes a los del sistema trasladados a un punto cualquiera del espacio.

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + ... + \mathbf{A}_n = \sum_1^n \mathbf{A}_i \qquad (2\text{-}4)$$

Los vectores equivalentes a los del sistema tomados en cualquier punto del espacio siempre son los mismos, luego de su definición, **R** es un vector libre que se denomina el *invariante vectorial* del sistema, figura 2-4.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

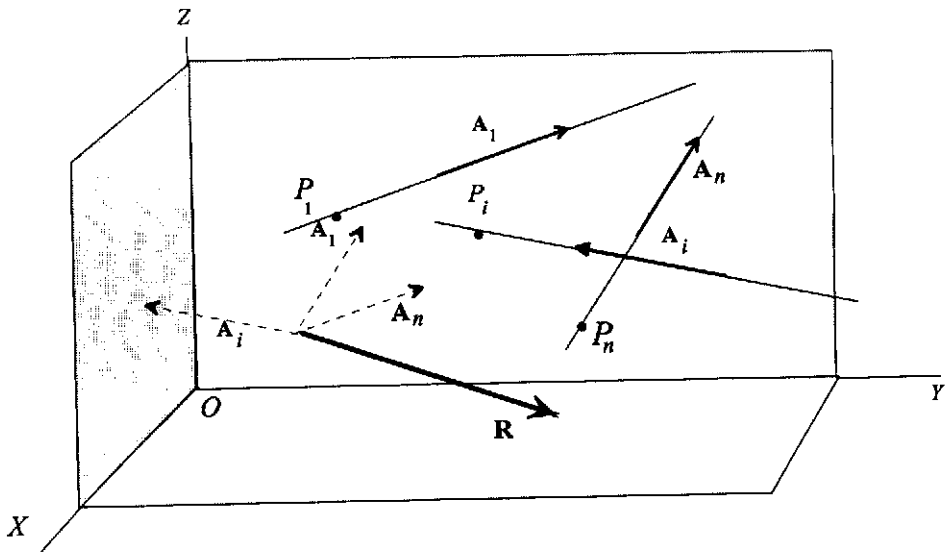


Fig.2-4

Momento resultante. Se define el momento resultante del sistema de vectores deslizantes respecto de un punto Q del espacio como la suma de los momentos de cada uno de los vectores $\mathbf{A}_i$ respecto de dicho punto, figura 2-5.

$$\mathbf{M}_Q = \sum_1^n \overrightarrow{QP_i} \wedge \mathbf{A}_i \tag{2-5}$$

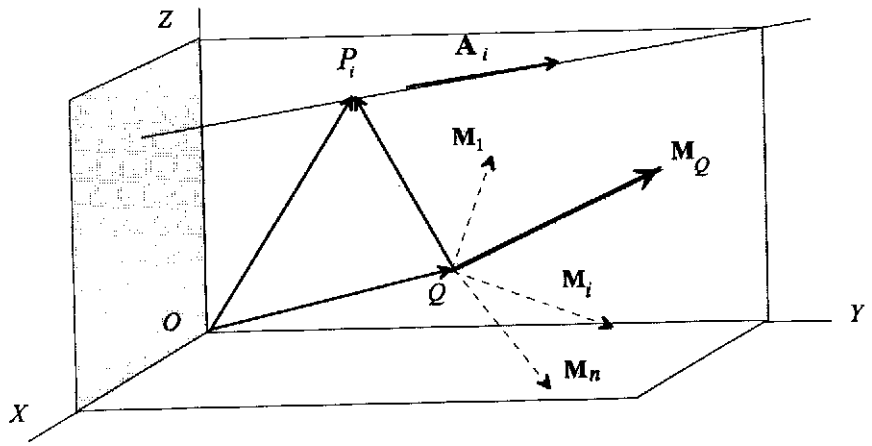


Fig. 2-5

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

El momento resultante respecto de otro punto, por ejemplo el P, es

$$\mathbf{M}_P = \sum_1^n \overrightarrow{PP_i} \wedge \mathbf{A}_i$$

Los momentos resultantes respecto de los dos puntos $\mathbf{M}_P$ y $\mathbf{M}_Q$ son, en general, vectores diferentes pero entre ellos existe una relación similar a la dada por la ecuación (2-2), que relaciona los momentos de un vector deslizante respecto de dos puntos del espacio, figura 2-6.

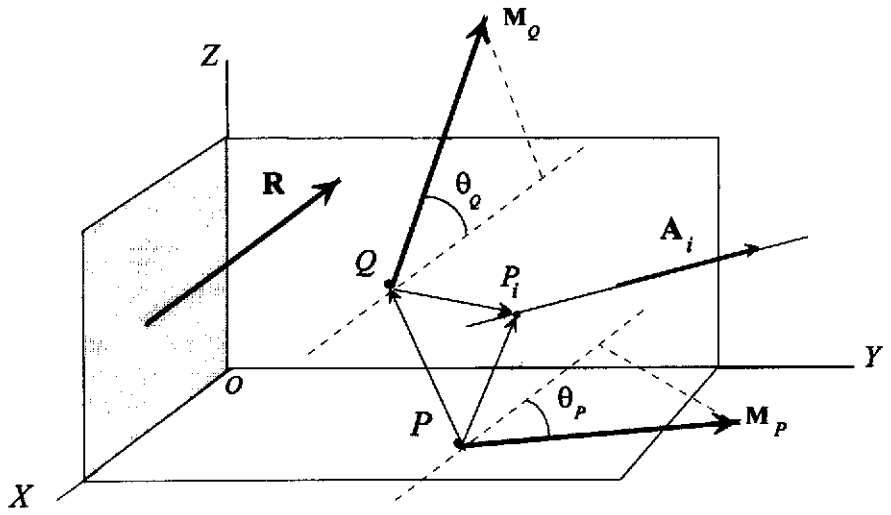


Fig. 2-6

De la figura 2-6 se tiene la relación triangular $\overrightarrow{PP_i} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP_i}$, que sustituida en la expresión de $\mathbf{M}_P$ queda

$$\mathbf{M}_P = \sum_1^n (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP_i}) \wedge \mathbf{A}_i = \mathbf{M}_Q + \overrightarrow{PQ} \wedge (\sum_1^n \mathbf{A}_i)$$

El sumatorio de los vectores $\mathbf{A}_i$ es la resultante $\mathbf{R}$ del sistema; sustituyendo, se obtiene la ecuación que relaciona los momentos resultantes del sistema de vectores deslizantes respecto de dos puntos del espacio

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{M}_Q + \overrightarrow{PQ} \wedge \mathbf{R} \tag{2-6}$$

Los momentos resultantes de un sistema de vectores respecto de dos puntos del espacio están relacionados por una ecuación equivalente a la ecuación que relaciona los momentos de un vector **A** respecto de los mismos puntos, cambiando el vector **A** por la resultante **R** del sistema. Cuando la dirección definida por los puntos P y Q es un vector paralelo a **R**, los momentos respecto de P y Q coinciden. Este resultado permite enunciar que : *a todos los puntos de una recta paralela a la resultante le corresponde un único valor del momento resultante del sistema.*

Multiplicando escalarmente por **R** la ecuación (2-6) y teniendo en cuenta que el producto mixto es cero se tiene que

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_P = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_Q \tag{2-7}$$

Desarrollando el producto escalar y eliminando el módulo de **R** queda

$$M_P \cos \theta_P = M_Q \cos \theta_Q \tag{2-8}$$

es decir, la proyección de los momentos resultantes sobre la dirección de la resultante tiene el mismo valor para todos los puntos del espacio, ver figura 2-6. Este valor se denomina el *invariante escalar* del sistema.

Llamando **M** al momento resultante respecto de un punto genérico, y θ al ángulo que forma con la resultante **R**, la ecuación se escribe como

$$M \cos \theta = \text{cte.} \tag{2-9}$$

Al producto escalar de la resultante **R** por el momento resultante **M** es también un invariante que se denomina el *trinomio invariante* del sistema.

$$T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M} \tag{2-10}$$

Los sistemas de vectores deslizantes se pueden clasificar en dos grupos: a) *sistemas de vectores que se cortan* y b) *sistemas de vectores que se cruzan.*

Sistema de vectores que se cortan. Un sistema de vectores deslizantes que se cortan, es aquel en que las rectas soporte de todos los vectores del sistema tiene un punto común. En general, el origen O se toma en el punto en el que se cortan las rectas soporte de los vectores

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

del sistema. La resultante **R** es la suma de los vectores del sistema. El momento resultante respecto del punto *O* es cero, ya que todos los vectores del sistema pasan por *O* y de acuerdo con la ecuación (2-6) se deduce que el momento respecto de otro punto *P* cualquiera del espacio está dado por

$$\mathbf{M}_P = \overrightarrow{PO} \wedge \mathbf{R} \tag{2-11}$$

que es el momento de la resultante respecto del punto *P*. De la ecuación (2-11) se deduce que el momento **M** respecto de cualquier punto es perpendicular a la resultante, luego el invariante escalar del sistema y el trinomio invariante son nulos.

Sistema de vectores que se cruzan. Un sistema de vectores deslizantes que se cruzan, es aquel en que las rectas soporte de los vectores no tienen ningún punto común. Las ecuaciones (2-4) y (2-5) dan la resultante y el momento resultante del sistema, y la ecuación (2-6) da la relación entre los momentos resultantes respecto de dos punto del espacio. E invariante escalar y el trinomio invariante del sistema están dados por las ecuaciones (6-9) y (6-10) respectivamente.

De la ecuación (2-9) se deduce que, a valores grandes de *M* le corresponden ángulos θ grandes (valor del coseno pequeño), y a valores pequeños de *M* le corresponden ángulos θ pequeños (valor del coseno grande). Para los puntos en que el ángulo θ sea igual a 0° (180°) el coseno tiene el valor + 1 (−1), luego **M** y **R** son paralelos (antiparalelos) y el momento resultante tiene un valor mínimo.

2.5 Eje central

Se denomina eje central al lugar geométrico de los puntos del espacio tales que su momento es paralelo a la resultante. Los momentos paralelos a la resultante tienen valor mínimo, por consiguiente, todos ellos tienen el mismo momento y el lugar geométrico es, por tanto, una recta paralela a la resultante. Si *C* es un punto del eje central el momento resultante $\mathbf{M}_c$ es paralelo a la resultante **R** y su módulo M_C es mínimo, figura 2-7. Para localizar el eje central es necesario determinar únicamente uno cualquiera de sus puntos ya que **R** es su vector que define la dirección de la recta.

Sea *C* un punto del eje central cuyas coordenadas queremos determinar. Las coordenadas del punto *C* son las componentes del vector $\overrightarrow{oc}$ que fija la posición de *C* respecto del origen. Dado el sistema de vectores deslizantes $\mathbf{A}_i$, pasando por los puntos P_i, la resultante del sistema y el momento resultante respecto del origen son

$$\mathbf{R} = \sum_1^n \mathbf{A}_i \qquad \mathbf{M}_o = \sum_1^n \overrightarrow{OP_i} \wedge \mathbf{A} \tag{2-12}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

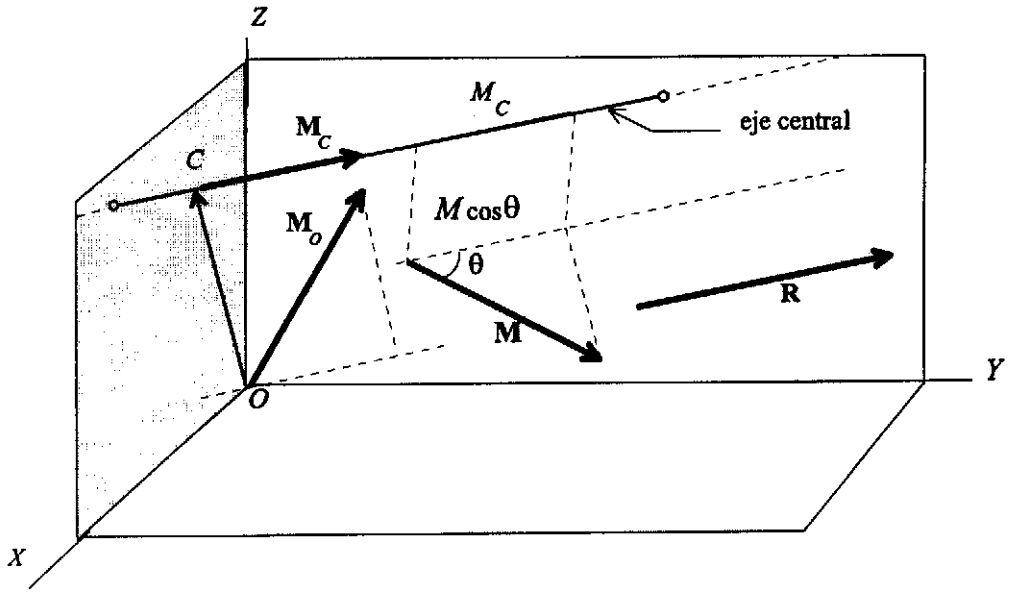


Fig. 2-7

De la ecuación (2-6) se tiene que los momentos resultantes respecto de O y respecto de C están relacionados por la ecuación

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{M}_o - \overrightarrow{OC} \wedge \mathbf{R} \tag{2-13}$$

Multiplicando la ecuación (2-13) vectorialmente por $\mathbf{R}$ por la izquierda, y teniendo en cuenta que el momento resultante respecto de C y la resultante $\mathbf{R}$ son vectores paralelos, queda

$$0 = \mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_o - \mathbf{R} \wedge (\overrightarrow{OC} \wedge \mathbf{R}) \tag{2-14}$$

Desarrollando el doble producto vectorial se tiene

$$0 = \mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_o - R^2 \overrightarrow{OC} + (\mathbf{R} \cdot \overrightarrow{OC})\mathbf{R} \tag{2-15}$$

El resultado de la ecuación (2-15) es válido para *todos* los puntos del eje central. Se puede

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

seleccionar el punto C como el correspondiente al pie de la perpendicular trazada desde el origen al eje. De esta forma el vector $\overrightarrow{oc}$ será perpendicular a $\mathbf{R}$ y, por tanto, el producto escalar $\overrightarrow{oc} \cdot \mathbf{R}$ será igual a cero, lo que permite obtener la expresión del vector $\overrightarrow{oc}$ en función de la resultante del sistema y del momento resultante respecto del origen de coordenadas. Despejando $\overrightarrow{oc}$ de la ecuación (2-15) se obtiene

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_o}{R^2} = x_c\,\mathbf{i} + y_c\,\mathbf{j} + z_c\,\mathbf{k} \tag{2-16}$$

Las componentes del vector $\overrightarrow{oc}$ son las coordenadas del punto C del eje central y su ecuación en forma continua es

$$\frac{x - x_c}{R_1} = \frac{y - y_c}{R_2} = \frac{z - z_c}{R_3} \tag{2-17}$$

donde R_1, R_2 y R_3 son las componentes de la resultante $\mathbf{R}$. Cuando $\mathbf{M}_o$ es paralelo a la resultante $\mathbf{R}$ el eje central pasa por el origen y $\mathbf{M}_o$ es el momento mínimo. Fácilmente se puede deducir que el momento mínimo está dado por la expresión

$$\mathbf{M}_c = \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_o}{R^2}\right)\mathbf{R} \qquad \Rightarrow \qquad M_c = \frac{|T|}{R} \tag{2-18}$$

El momento mínimo $\mathbf{M}_c$ es paralelo a la resultante $\mathbf{R}$ si el trinomio invariante $T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}$ es mayor que cero. Cuando el trinomio invariante tiene un valor negativo el momento mínimo y la resultante son antiparalelos.

2.6 Par de vectores

Un caso particularmente importante de un sistema de vectores que se cruzan lo constituye el formado por dos vectores deslizantes $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$ pasando por P_1 y P_2, tales que ambos vectores tienen el mismo módulo $A_1 = A_2 = A$, son paralelos pero de sentidos opuestos y sus rectas soportes están separadas una distancia d. El sistema se denomina par. La resultante $\mathbf{R}$ del sistema es el vector nulo y, por tanto, según la ecuación (2-6), el momento del par es el mismo en todos los puntos del espacio. El momento del par lo podemos tomar respecto de cualquier punto del espacio, pero resulta más sencillo calcular el momento del par utilizando el

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

punto P_1 o el P_2 de sus rectas soportes, figura 2-8

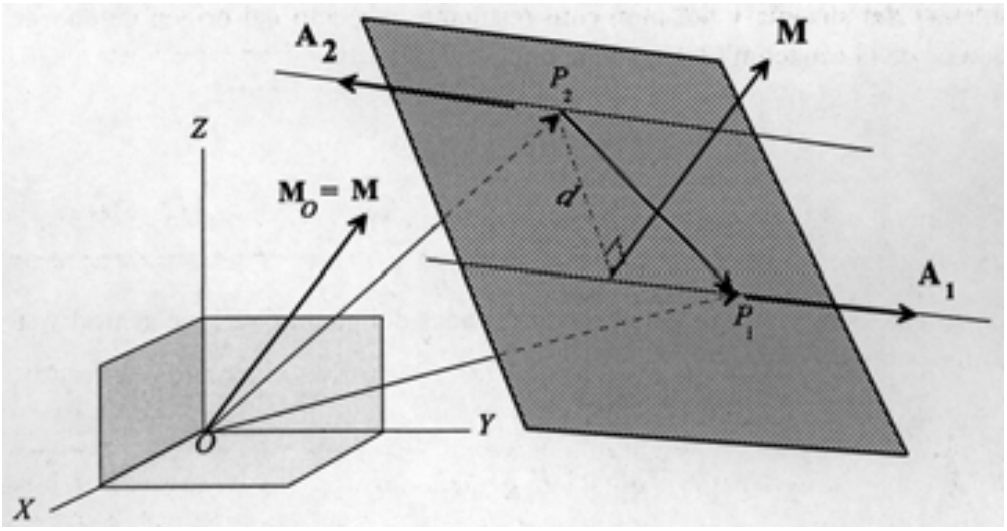


Fig. 2-8

Tomando momentos respecto del punto P_2 se tiene $\mathbf{M} = \overrightarrow{P_1P_2} \wedge \mathbf{A}_1$, ya que el momento de $\mathbf{A}_2$ respecto de P_2 es cero. El momento del par es un vector perpendicular al plano definido por los dos vectores. Calculemos directamente el momento resultante respecto del origen para ver que coincide con **M**. En efecto, sumando los momentos de cada uno de los vectores del para respecto del origen queda

$$\mathbf{M}_o = \overrightarrow{OP_1} \wedge \mathbf{A}_1 + \overrightarrow{OP_2} \wedge \mathbf{A}_2 = (\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_2}) \wedge \mathbf{A}_1 = \overrightarrow{P_1P_2} \wedge \mathbf{A}_1 = \mathbf{M}$$

En consecuencia, como ya se ha indicado, *el momento* **M** *del par es el mismo en todos los puntos del espacio.* Su módulo es el producto del módulo A de los vectores del par por la distancia d que los separa

$$M = d\ A \qquad (2\text{-}19)$$

El par de vectores cuyo momento es **M** queda totalmente indeterminado, en el sentido de que para un momento dado hay infinitos pares de vectores que tienen el mismo momento. El par queda determinado por su momento.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

2.7 Sistemas de vectores deslizantes coplanarios

Un sistema de vectores deslizantes es coplanario cuando todos los vectores del sistema están contenidos en el mismo plano, figura 2-9. El plano que contiene a los vectores del sistema se hace coincidir con uno de los planos del sistema de coordenadas.

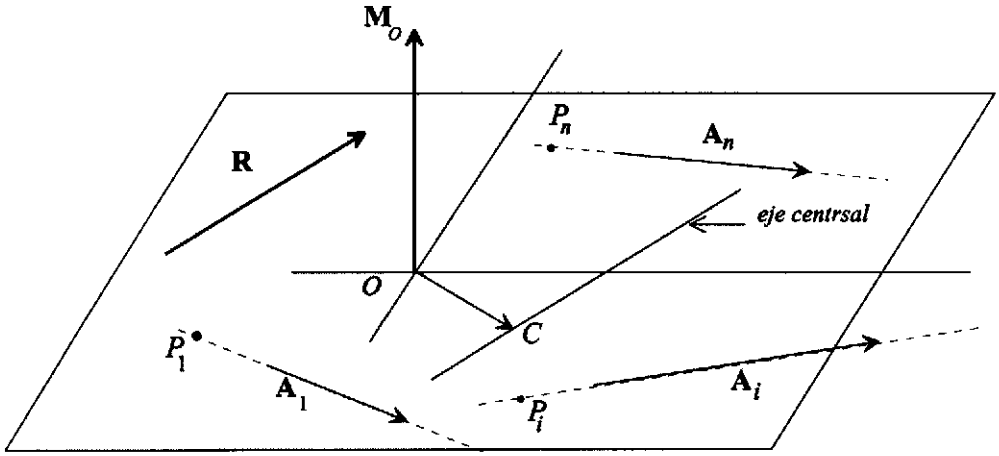


Fig. 2-9

La resultante del sistema $\mathbf{R} = \Sigma\, \mathbf{A}_i$ es un vector paralelo al plano del sistema y el momento resultante respecto del origen

$$\mathbf{M}_o = \Sigma\, \overrightarrow{OP_i} \wedge \mathbf{A}_i$$

es un vector perpendicular al plano del sistema. El trinomio invariante $T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_o = 0$, luego el momento mínimo es cero. El punto C del eje central está dado por

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_o}{R^2} \qquad (2\text{-}20)$$

y pertenece al plano del sistema ya que $\mathbf{R}$ y $\mathbf{M}_o$ son vectores perpendiculares. Como el momento mínimo es cero, el eje central es la recta del plano tal que el momento resultante del sistema respecto de cualquier punto de ella es nulo.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

2.8 Reducción de sistemas de vectores deslizantes

En la práctica, el número de vectores de un sistema puede ser muy grande lo que hace que sea engorroso el cálculo de la resultante y del momento resultante del sistema respecto de un punto del espacio. Los parámetros que caracterizan a un sistema son su resultante y su momento resultante, luego sería realmente ventajoso que dado un sistema, se pudiese determinar otro sistema mas sencillo que tenga, la misma resultante y el mismo momento resultante que el primero Cuando dos sistemas cumplen ambas condiciones son *equivalentes* y el sistema más sencillo es el sistema *reducido* del primero.

Sistemas equivalentes. El sistema formado por los vectores $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, ..., $\mathbf{A}_n$ aplicados en los puntos P_1 , P_2 , ..., P_n , y el formado por los vectores $\mathbf{A}_1'$, $\mathbf{A}_2'$,..... $\mathbf{A}_n'$ aplicados en los puntos P_1', P_2' , ...P_n', son equivalentes cuando se cumplen las siguientes condiciones: a) *tienen la misma resultante* $\mathbf{R} = \mathbf{R}'$ y b) *tienen el mismo momento resultante respecto de un punto del espacio* $\mathbf{M}_Q = \mathbf{M}_Q'$. Aplicando la ecuación 2-6, se deduce inmediatamente que dos sistemas equivalentes tienen el mismo momento resultante respecto de todos los puntos del espacio.

Reducción de sistemas. El proceso de reducción de un sistema consiste en *determinar* otro más sencillo que sea equivalente al sistema dado. Veamos que un sistema dado cualquiera se puede reducir como máximo a otro que tiene tres vectores, dos de los cuales forman un par. En efecto, sean $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, ..., $\mathbf{A}_n$, pasando por los puntos P_1 , P_2 , ..., P_n los vectores deslizantes del sistema que se quiere reducir. Su resultante es

$$\mathbf{R} = \sum_1^n \mathbf{A}_i \tag{2-21}$$

y el momento resultante respecto de O es

$$\mathbf{M}_O = \sum_1^n \overrightarrow{OP_i} \wedge \mathbf{A}_i \tag{2-22}$$

Formemos el sistema $\mathbf{A}_1'$, $\mathbf{A}_2'$, $\mathbf{A}_3'$ tal que $\mathbf{A}_1'$ esté aplicado en el origen O y sea igual a la resultante $\mathbf{R}$ del sistema dado, y $\mathbf{A}_2'$, $\mathbf{A}_3'$ formen un par, cuyo momento $\mathbf{M}'$ sea igual al momento resultante del sistema dado respecto del origen O. Veamos que ambos sistemas son equivalentes. La resultante $\mathbf{R}'$ es $\mathbf{R}' = \mathbf{A}_1' + \mathbf{A}_2' + \mathbf{A}_3' = \mathbf{A}_1'$ ya que $\mathbf{A}_2' = -\mathbf{A}_3'$, pero $\mathbf{A}_1' = \mathbf{R}$, luego las resultantes de ambos sistemas son iguales, $\mathbf{R}' = \mathbf{R}$. El momento resultante del sistema prima respecto del origen es únicamente el momento del par ya que el momento de $\mathbf{A}_1'$ es cero pues pasa por O, pero el momento del par es igual al momento resultante del sistema dado respecto de O, $\mathbf{M}' = \mathbf{M}_o$ luego ambos sistemas son equivalentes.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

La elección del punto O para reducir el sistema es arbitraria, se podría haber tomado cualquier otro punto del espacio. Si el sistema de vectores dado tiene eje central podemos elegir el punto C de dicho eje para reducir el sistema. El momento del sistema dado respecto de C es el momento mínimo $\mathbf{M}_c$. El sistema $\mathbf{A}'_1 = \mathbf{R}$ pasando por C y el par $\mathbf{A}'_2 = -\mathbf{A}'_3$, tal que su momento sea $\mathbf{M}_c$, es un sistema equivalente al dado. En este caso, los vectores del par están contenidos en un plano perpendicular al eje central.

Torsor. El sistema reducido de un sistema dado formado por, el vector $\mathbf{A}'_1$ igual a la resultante $\mathbf{R}$ del sistema sobre el eje central y un par $\mathbf{A}'_2 = -\mathbf{A}'_3$ tal que el módulo sea igual al módulo de la resultante del sistema $A'_2 = A'_3 = R$ y su momento sea igual al momento mínimo $\mathbf{M}_c$ del sistema, se denomina el *torsor* del sistema, figura 2-10.

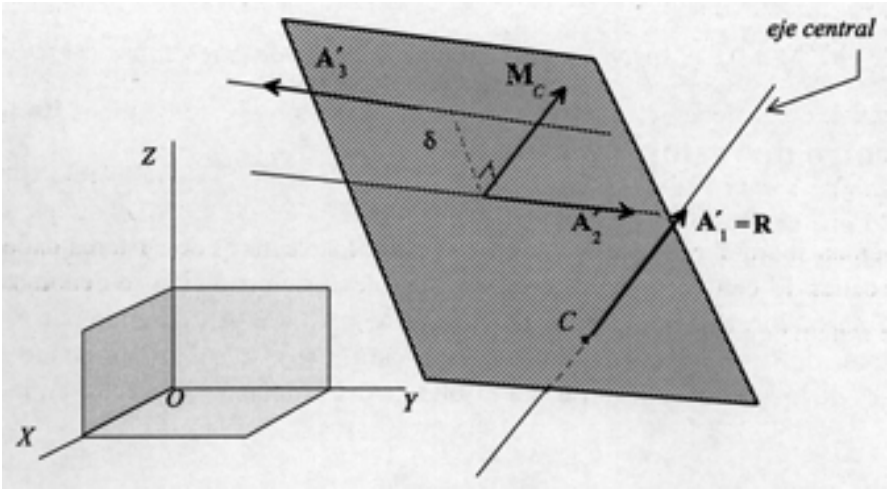


Fig. 2-10

La distancia entre los vectores del par es la flecha del torsor δ. Su valor está dado por

$$\delta = \frac{M_c}{R} = \frac{|\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}|}{R^2} \qquad (2\text{-}23)$$

Sistema coplanario. En el caso particular de que el sistema de vectores sean coplanarios, como el momento mínimo es cero, el sistema se *reduce a un único vector* igual a la resultante del sistema $\mathbf{A}'_1 = \mathbf{R}$ aplicado en el punto C del eje central.

Clasificación de sistemas. Los sistemas de vectores deslizantes se clasifican en función del valor de su trinomio invariante T. Un sistema se reduce a un torsor cuando el producto escalar de $\mathbf{R}$ por $\mathbf{M}$ es distinto de cero, es decir, cuando $T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M} \neq 0$. En este caso, el sistema se

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

reduce a su resultante aplicada en el eje central más un par cuyo momento coincide con el momento mínimo del sistema y el módulo de los vectores del par es igual al módulo de la resultante del sistema.

Veamos ahora a que se reducen los sistemas tales que su trinomio invariante es nulo, es decir, sistema para los cuales se cumple que $T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M} = 0$. El trinomio invariante puede ser cero en los siguientes casos:

a) $\mathbf{R} = 0$ y $\mathbf{M} = 0$, *el sistema es equivalente a cero*

b) $\mathbf{R} \neq 0$ y $\mathbf{M} = 0$, *el sistema es equivalente a un vector único*

c) $\mathbf{R} = 0$ y $\mathbf{M} \neq 0$, *el sistema es equivalente a un par*

d) $\mathbf{R} \neq 0$ y $\mathbf{M} \neq 0$, *el sistema es equivalente a un vector único sobre el eje central.*

2.9 Centro de vectores paralelos

Consideremos ahora el caso particular en que todos los vectores del sistema dado tienen la misma dirección. El conjunto de vectores que cumplen esta condición se denomina *sistema de vectores paralelos.* Sea $\mathbf{u}$ un vector unitario, y $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, ..., $\mathbf{A}_n$ pasando por P_1 , P_2 , ..., P_n los vectores del sistema, tales que $\mathbf{A}_i = A_i \mathbf{u}$ para i = 1, 2, ... n, en donde A_i son las componentes de los vectores según $\mathbf{u}$. La resultante del sistema es un vector en la dirección de $\mathbf{u}$

$$\mathbf{R} = \left(\sum A_i \right) \mathbf{u} \tag{2-24}$$

y el momento resultante respecto del origen es un vector perpendicular a $\mathbf{u}$ dado por

$$\mathbf{M}_o = \sum_1^n \overrightarrow{OP_i} \wedge \mathbf{A}_i = \left(\sum_1^n A_i \overrightarrow{OP_i} \right) \wedge \mathbf{u} \tag{2-25}$$

luego el trinomio invariante $T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M} = 0$ ya que $\mathbf{R}$ y $\mathbf{M}_o$ son perpendiculares, figura 2-11. El sistema equivale a un vector único que es la resultante $\mathbf{R}$ pasando por un punto C del eje central dado por

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_o}{R^2} \tag{2-26}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

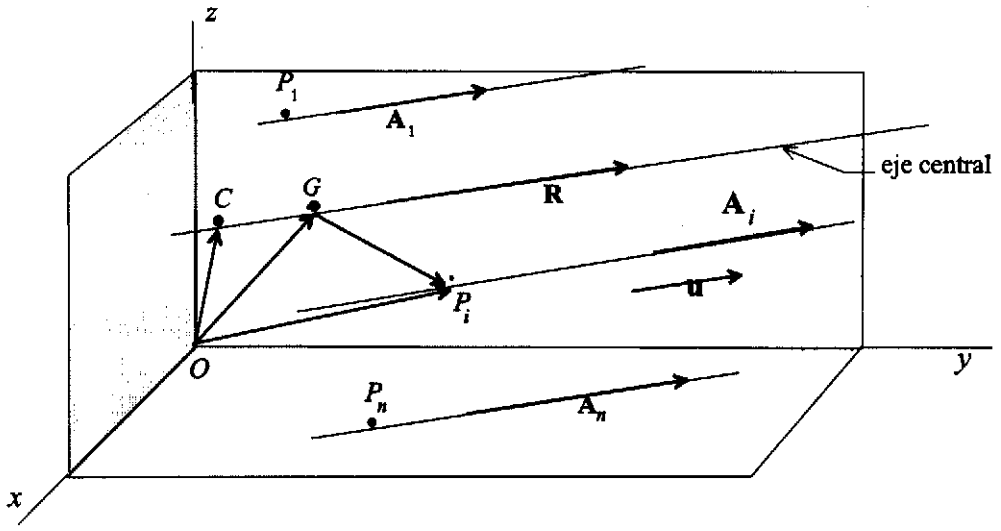


Fig. 2-11

Veamos que el extremo del vector $\overrightarrow{OG}$ definido por la siguiente ecuación vectorial es un punto del eje central.

$$\overrightarrow{OG} = \frac{A_1 \overrightarrow{OP_1}}{R} + \frac{A_2 \overrightarrow{OP_2}}{R} + \cdots + \frac{A_n \overrightarrow{OP_n}}{R} = \frac{\sum A_i \overrightarrow{OP_i}}{\sum A_i} \qquad (2\text{-}27)$$

En efecto, sea G un punto del eje central. Ya que el momento mínimo es nulo, el momento resultante respecto de G ha de ser cero, luego se cumple que

$$\sum_1^n \overrightarrow{GP_i} \wedge \mathbf{A}_i = \mathbf{0} \qquad (2\text{-}28)$$

Despejando $\overrightarrow{GP_i}$ de la relación triangular $\overrightarrow{OP_i} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP_i}$ i= 1, 2,..... n, y sustituyendo en (2-28), se obtiene

$$\sum_1^n (\overrightarrow{OP_i} \wedge \overrightarrow{OG}) \wedge \mathbf{A}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\sum_1^n A_i \overrightarrow{OP_i} - \left(\sum_1^n A_i \right) \overrightarrow{OG} \right] \wedge \mathbf{u} = 0 \qquad (2\text{-}29)$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

El producto vectorial del primer término de la ecuación (2-29) es igual a cero para toda dirección **u**, lo que implica que el vector entre corchetes ha de ser necesariamente nulo, de donde

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum A_i \overrightarrow{OP_i}}{\sum A_i} \tag{2-30}$$

La ecuación (2-30) define unívocamente el punto G extremo del vector $\overrightarrow{OG}$, como un punto del eje central que se denomina el *centro de vectores paralelos*. Su posición en el espacio es independiente del punto que se tome como origen. Desarrollando (2-30) se tiene la expresión del vector en componentes

$$\overrightarrow{OG} = \left(\frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\sum A_i z_i}{\sum A_i}\right)\mathbf{k} = \bar{x}\,\mathbf{i} + \bar{y}\,\mathbf{j} + \bar{z}\,\mathbf{k} \tag{2-31}$$

en donde (x_i, y_i, z_i) son las coordenadas del punto P_i. Las componentes del vector $\overrightarrow{OG}$ se les suele designar como $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, que son las coordenadas del punto G, centro del sistema de vectores paralelos.

www.elsolucionario.net

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 2.1

Determinar el momento del vector deslizante $\mathbf{A} = 2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$ pasando por el punto $P\,(3,-1,2)$ respecto del origen y respecto del punto $Q\,(1,-2,3)$. Comprobar que se cumple la relación entre los momentos.

SOLUCIÓN

El momento respecto del origen es $\mathbf{M}_o = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -5\,\mathbf{i} - 5\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}$

El momento respecto del punto Q es $\mathbf{M}_Q = \overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 4\mathbf{i} - 8\,\mathbf{j}$

Comprobemos que se cumple la relación entre los momentos $\mathbf{M}_o = \mathbf{M}_Q + \overrightarrow{OQ} \wedge \overrightarrow{A}$; en efecto, el producto vectorial del segundo término es

$$\overrightarrow{OQ} \wedge \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -9\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}$$

que sumado a $\mathbf{M}_Q$ da el valor de $\mathbf{M}_o$

PROBLEMA 2.2

Dado el vector deslizante $\mathbf{A} = 3\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + 6\,\mathbf{k}$, tal que su momento respecto del origen es el vector $\mathbf{M}_o = a\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$. Determinar el valor de a y un punto de su recta soporte.

SOLUCIÓN

El momento del vector es perpendicular al vector, luego se cumple $\mathbf{M}_o \cdot \mathbf{A} = 0$. Desarrollando el producto escalar se tiene $a = 3$. Sea $P\,(x_o, y_o, z_o)$ un punto de la recta soporte del vector $\mathbf{A}$. El momento del vector respecto del origen es

$$\mathbf{M}_o = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = (6y_o - z_o)\,\mathbf{i} + 3\,(z_o - 2x_o)\,\mathbf{j} + (x_o - 3y_o)\,\mathbf{k}$$

Identificando términos con el valor de $\mathbf{M}_o$ se tiene el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$\begin{aligned} 6y_o - z_o &= 3 \\ -6x_o + 3z_o &= 3 \\ x_o - 3y_o &= -2 \end{aligned}$$

El determinante del sistema $\begin{vmatrix} 0 & 6 & -1 \\ -6 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0$

tiene un valor nulo, luego las tres ecuaciones son linealmente dependientes y existen infinitas soluciones. Haciendo $x_o = -2$ se tienen los valores $y_o = 0$ y $z_o = -3$, que son las coordenadas de un punto de la recta.

PROBLEMA 2.3

Dado un vector **A** sobre la recta de ecuación $\frac{x-1}{\sqrt{2}} = \frac{y-2}{\sqrt{3}} = \frac{z}{2}$, determinar su momento m respecto del eje dado por $x = \frac{y-1}{\sqrt{2}} = z - 2$

SOLUCIÓN

El vector **A** en componentes es $\mathbf{A} = \sqrt{2}\,\mathbf{i} + \sqrt{3}\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$. Un punto P de su recta soporte es el punto de coordenadas (1, 2, 0).

El vector unitario **u** del eje es $\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$

Uno de sus puntos Q, es el punto de coordenadas (0, 1, 2). El momento de **A** respecto de Q es el vector

$$\mathbf{M}_Q = \overrightarrow{QP} \wedge \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} = 2(1 + \sqrt{3})\,\mathbf{i} - (1 + \sqrt{2})\,\mathbf{j} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\,\mathbf{k}$$

El momento m de **A** respecto del eje **u** es $m = \mathbf{u} \cdot \mathbf{M}_Q = \frac{3}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - 1$

El escalar m es negativo. En todos los puntos del eje el momento forma con el eje un ángulo mayor de 90°.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 2.4

De un sistema de vectores deslizantes se conoce: el módulo de la resultate $R = 21$, el trinomio invariante $T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M} = 25$ y la ecuación del eje central, $2x = 3y = z$. Determinar :
a) la resultante
b) el momento mínimo
c) el momento respecto del punto P (3, 2, 1)

SOLUCIÓN

a) El vector **R** es paralelo al vector director del eje central. Sean R_1 , R_2 y R_3 las componentes de la resultante. De la condición de paralelismo se tiene

$$\frac{R_1}{3} = \frac{R_2}{2} = \frac{R_3}{6} = \lambda$$

Despejando cada una de las componentes y sustituyendo en la expresión del módulo queda

$$49\lambda^2 = 21^2 \quad \text{de donde} \quad \lambda = 3$$

La resultante del sistema es $\mathbf{R} = 9\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + 18\,\mathbf{k}$

b) Del trinomio invariante se tiene el módulo del momento mínimo $M_o = \frac{25}{R} = \frac{25}{21}$, de donde

$$\mathbf{M}_m = \frac{25}{21^2}\,\mathbf{R} = \frac{25}{147}(3\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 6\,\mathbf{k})$$

c) El origen es un punto del eje central, por consiguiente, el momento resultante respecto del origen es el momento mínimo. De la ecuación de los momentos se tiene

$$\mathbf{M}_o = \mathbf{M}_P + \overrightarrow{OP} \wedge \mathbf{R}$$

pero el momento respecto de O es el momento mínimo. Sustituyendo y operando queda

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{M}_m + 3\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{25}{49} - 30\right)\mathbf{i} + \left(\frac{50}{147} + 45\right)\mathbf{j} + \frac{50}{49}\,\mathbf{k}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 2.5

Dado el sistema de vectores deslizantes $\mathbf{A}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{A}_2 = (a, 1, 0)$ y $\mathbf{A}_3 = (1, 0, -1)$ pasando por los puntos $P_1\,(1, 2, 3)$, $P_2\,(-1, 0, 1)$ y $P_3\,(2, 0, -1)$. Determinar: a) el valor de a para que el módulo de la resultante sea $R = 5$, b) el momento resultante respecto del origen, c) el momento resultante mínimo, d) la ecuación del eje central, e) Si el módulo de la resultante no es conocido, determinar el valor de a para que el sistema equivala a un único vector.

SOLUCION

a) La resultante del sistema es $\mathbf{R} = (2 + a)\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}$, cuyo módulo cumple $25 = (2 + a)^2 + 9$, de donde

$$2 + a = \pm 4 \quad \text{y} \quad a = +2\ , -6$$

b) La resultante del sistema es $\mathbf{R} = \pm 4\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}$; el signo + corresponde al valor $a = 2$ y el signo – al valor $a = -6$. El momento resultante respecto del origen es (para $a = -6$)

$$\mathbf{M}_o = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -5\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

c) El trinomio invariante es $T = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M} = 11$; el momento mínimo es $\mathbf{M}_m = \frac{11}{25}(-4\,\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$

d) Un punto del eje central está dado por $\overrightarrow{OC} = \dfrac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_o}{R^2} = \dfrac{1}{25}(-3\,\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 27\,\mathbf{k})$

ecuación del eje central en forma continua $\dfrac{x + \frac{3}{25}}{-4} = \dfrac{y - \frac{4}{25}}{3} = \dfrac{z - \frac{27}{25}}{0}$

o como intersección de dos planos $75\,x + 100\,y = 7$; $25\,z = 27$.

e) El sistema equivale a un único vector cuando $\mathbf{R} \neq 0$ y $\mathbf{M} \neq 0$, pero $\mathbf{M} \cdot \mathbf{R} = 0$. El momento respecto del origen es

$$\mathbf{M}_o = -5\,\mathbf{i} + (3 + a)\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

De $T = 0$ se tiene $-10 - 5\,a + 9 + 3\,a = 0$, de donde $a = -1/2$.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Un punto de la recta soporte del vector está ahora dado por las componentes del vector

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_o}{R^2} = \frac{4}{45} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -5 \\ \frac{5}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{12}{45}\mathbf{i} + \frac{6}{45}\mathbf{j} + \frac{75}{45}\mathbf{k}$$

El momento del sistema respecto del punto C $\left(\frac{-12}{45}, \frac{6}{45}, \frac{75}{45}\right)$ es cero.

PROBLEMA 2.6

De un sistema de vectores deslizantes se conocen sus momentos respecto de tres puntos del espacio $\mathbf{M}_o = 2\,\mathbf{i} + \mathbf{j}$ respecto del origen ; $\mathbf{M}_P = 4\,\mathbf{i} + a\,\mathbf{j}$ respecto del punto $P(1, 1, 1)$ y $\mathbf{M}_Q = b\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$ respecto del punto $Q(0, 1, -1)$.
Determinar : a) la resultante , b) los valores de a, b y c , c) el eje central

SOLUCIÓN

a) La ecuación (2-6) relaciona los momentos resultantes de un sistema de vectores deslizantes respecto de dos puntos del espacio. Aplicada a los puntos *O-P* y *O-Q* respectivamente, se tiene

$$\mathbf{M}_o = \mathbf{M}_P + \overrightarrow{OP} \wedge \mathbf{R} \tag{1}$$

$$\mathbf{M}_o = \mathbf{M}_Q + \overrightarrow{OQ} \wedge \mathbf{R} \tag{2}$$

Se tienen que determinar las tres componentes (R_1 , R_2 , R_3) de la resultante **R** del sistema. Escribiendo las ecuaciones (1) y (2) en componentes queda:

$$2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} = 4\,\mathbf{i} + a\,\mathbf{j} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} = b\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \tag{4}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Desarrollando los productos vectoriales, agrupando términos e identificando los coeficientes de los vectores de la base en ambos miembros de las ecuaciones, se obtienen los siguientes sistemas lineales correspondientes respectivamente a las ecuaciones (3) y (4)

$$4 + R_3 - R_2 = 2 \qquad b + R_2 + R_3 = 2$$

$$a + R_1 - R_3 = 1 \qquad 4 - R_1 = 1$$

$$R_2 - R_1 = 0 \qquad c - R_1 = 0$$

Resolviendo el sistema se encuentra que $R_1 = R_2 = 3$ y $R_3 = 1$; luego la resultante del sistema está dada por

$$\mathbf{R} = 3\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

b) Del sistema se tiene que los valores de los coeficientes a, b y c están dados por

$$a = -1 \qquad b = -2 \qquad c = 3$$

c) La ecuación (2-17) define el vector $\overrightarrow{OC}$ cuyo extremo es un punto del eje central.

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_0}{R^2} = \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{19}(-\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k})$$

La ecuación del eje central es

$$\frac{x + \frac{1}{19}}{3} = \frac{y - \frac{2}{19}}{3} = \frac{z + \frac{3}{19}}{1}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Capítulo 3 Cinemática de la partícula

3.1 Introducción

La Cinemática de la partícula estudia el movimiento de los cuerpos, los cuales se asimilan a puntos geométricos que se desplazan en el espacio euclídeo tridimensional, definiendo las magnitudes físicas fundamentales que determinan sus trayectorias. Para fijar la posición de un punto en el espacio se utilizan básicamente las coordenadas cartesianas definidas en el Capítulo 1, debido a la sencillez de las ecuaciones matemáticas que se utilizan en el estudio teórico del movimiento. No ocurre lo mismo con su utilización sistemática, ya que en una gran mayoría de casos prácticos las coordenadas cartesianas conduce a expresiones matemáticamente complejas, que dificultan o incluso impiden la obtención de la solución. La utilización de otros sistemas de coordenadas, tales como coordenadas polares, coordenadas esféricas, etc, simplifican el estudio del movimiento de la partícula.

El objetivo de la Cinemática de la partícula es la determinación de la curva que describe en el espacio, curva que se denomina *trayectoria*. Conocida la aceleración y fijadas las condiciones iniciales, la Cinemática proporciona el procedimiento para determinar la trayectoria, así como sus características geométricas. Las magnitudes que describen el movimiento, la posición, la velocidad y la aceleración, tienen carácter vectorial. El álgebra de vectores y la integración de ecuaciones diferenciales lineales son, entre otros, los elementos matemáticos comúnmente utilizados en la Cinemática.

El movimiento se manifiesta mediante el cambio de posición de los cuerpos en el espacio respecto de una referencia dada. Esquemáticamente la referencia se representa mediante tres ejes perpendiculares entre sí que se cortan en un punto, origen de la referencia, la cual se considera fija en el espacio y a la que se asocia un sistema de coordenadas para fijar la posición de la partícula. En lo que sigue, se utilizan indistintamente referencia o sistema de coordenadas para especificar el movimiento de la partícula.

3.2 Magnitudes fundamentales del movimiento

Sea P un punto genérico del espacio en el cual se encuentra la partícula en el instante t. En todo lo que sigue, partícula y punto tienen el mismo significado cinemático y serán utilizados ambos términos indistintamente. El punto P, junto con el origen O de la referencia, definen un vector con origen en O y extremo en P, al cual se le designará por $\mathbf{r} \equiv \overrightarrow{OP}$ y se denomina *vector posición* de la partícula. El punto P está en movimiento cuando su posición cambia con el tiempo, entonces el vector posición $\mathbf{r}$ es una función del tiempo t, $\mathbf{r} = \mathbf{r}\,(t)$. A

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

cada instante t le corresponde un valor del vector **r** cuyo punto extremo define la posición de la partícula en dicho instante.

Trayectoria. El lugar geométrico que describe el extremo del vector **r** (t) es una curva en el espacio que se denomina *trayectoria.* Cuando **r** (t) es una función continua del tiempo t, la trayectoria es una curva continua en el espacio, fig. 3-1. A medida que transcurre el tiempo, el extremo del vector posición se desplaza sobre la trayectoria. Sean **r** (t) y **r** ($t + \Delta t$) los valores del vector posición en el instante t y en un instante posterior $t + \Delta t$; el incremento del vector posición al pasar la partícula del punto P al punto Q ,es la diferencia entre ellos y se denomina *desplazamiento.*

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) \tag{3-1}$$

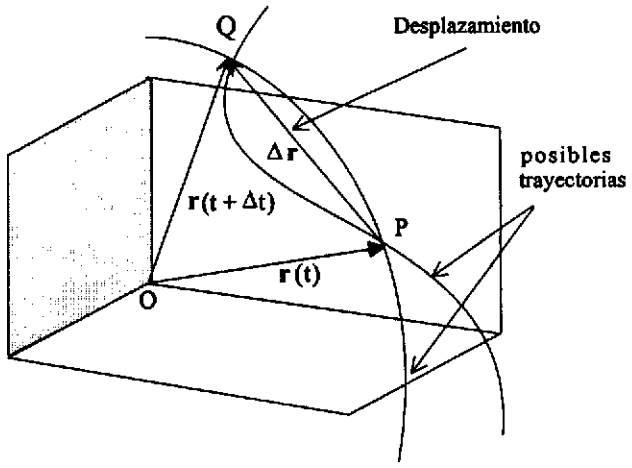


Fig. 3-1

El desplazamiento, en general, no coincide con el recorrido de la partícula sobre la trayectoria. Para un mismo desplazamiento existen infinitas trayectorias que conectan los extremos de los vectores posición que lo definen. En el caso de que la trayectoria sea rectilínea, el desplazamiento (en módulo) y el recorrido son coincidentes.

Velocidad media. Dividiendo ambos términos de la ecuación (3-1) por el incremento de tiempo entre ambas posiciones, se tiene un vector proporcional a **Δr** que se denomina *velocidad media* de la partícula en dicho intervalo de tiempo. Sus dimensiones son ms^{-1} .

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \tag{3-2}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Velocidad. Consideremos ahora valores de Δt cada vez más pequeños. A medida que sus valores disminuyen también el vector incremento del numerador de la fracción tiene valores cada menores. El límite del cociente cuando Δt tiende a cero, tiende a la derivada del vector posición **r** respecto del tiempo, que se denomina vector velocidad instantánea de la partícula o, de una manera simplificada, *velocidad* de la partícula.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \text{ms}^{-1} \tag{3-3}$$

Al tender a cero el incremento del tiempo, el extremo del vector $\Delta \mathbf{r}$ se mueve sobre la trayectoria aproximándose hacia el punto *P*. En el límite, los extremos del vector $d\mathbf{r}$ son dos puntos infinitamente próximos sobre la curva, puntos que definen la dirección de la tangente a la curva en dicho punto, luego la velocidad **v** es tangente a la curva en el punto *P*, y su sentido el del movimiento, figura 3-2. Este resultado es aplicable a cualquier punto de la trayectoria y, por tanto, *el vector velocidad tiene la dirección de la tangente a la trayectoria en cada uno de sus puntos.*

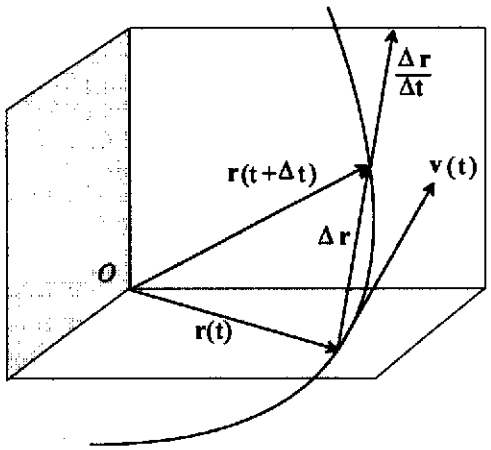


Fig. 3-2

Aceleración. La velocidad mide la tasa de cambio de posición de la partícula con el tiempo y es, por tanto, una magnitud básica del movimiento, pero no permite por sí sola su completa descripción, ya que éste depende de los cambios de la velocidad con el tiempo. La velocidad es una función vectorial continua del tiempo. Representando el vector velocidad

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

con origen en el origen de la referencia, su extremo describe una curva continua en el espacio que se denomina *hodógrafa,* figura 3-3. El incremento de velocidad que experimenta la partícula al pasar de un punto a otro de la trayectoria correspondientes a los instantes t y $t + \Delta t$, es igual a la diferencia de las velocidades en ambos instantes

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t) \tag{3-4}$$

Dividiendo por el incremento de tiempo en la ecuación la ecuación (3-4) se obtiene un vector proporcional al incremento de la velocidad que se denomina *aceleración media* de la partícula.

$$\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}(t+\Delta t)-\mathbf{v}(t)}{\Delta t} \tag{3-5}$$

Consideremos ahora incrementos de tiempo cada vez más pequeños, es decir, hacemos que el incremento de tiempo tienda a cero. El vector incremento de velocidad también tiende hacia cero y, en el límite, el cociente incremental tiende a la derivada de la velocidad v respecto del tiempo, vector que se denomina *aceleración* de la partícula en el instante t.

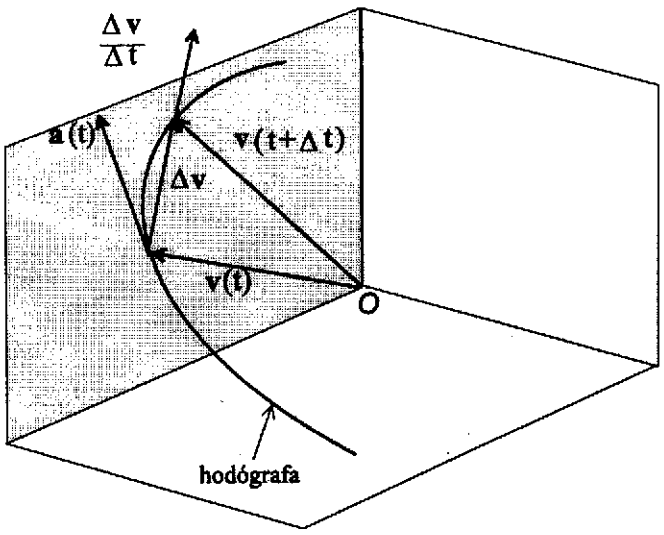


Fig.3-3

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

La aceleración instantánea de la partícula se define como el límite del cociente incremental dado por la ecuación (3-5) cuando el incremento de tiempo tiende a cero.

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad \text{ms}^{-2} \tag{3-6}$$

El vector aceleración **a** mide, la tasa de cambio de la velocidad con el tiempo, es tangente a la hodógrafa en cada uno de sus puntos y su dirección es totalmente arbitraria respecto de la trayectoria. La *aceleración es la magnitud cinemática que caracteriza el movimiento de la partícula en el espacio*. Conocida la aceleración y fijadas las condiciones iniciales el movimiento de la partícula queda completamente determinado.

Elección de la referencia. Consideremos ahora la influencia que tiene la elección de una referencia determinada sobre los valores de la velocidad **v** y la aceleración **a** de una partícula en movimiento. Veamos que la velocidad y la aceleración son las mismas en cualquier referencia fija que se utilice para describir el movimiento. En efecto, sea O el origen de una referencia fija y Q otro punto fijo cualquiera del espacio, figura 3-4.

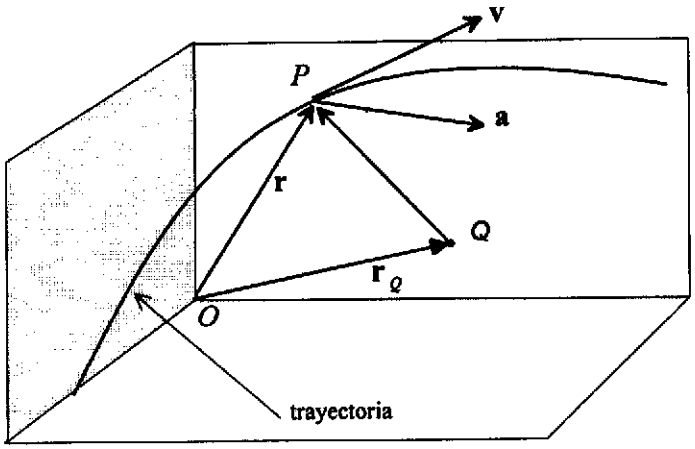


Fig. 3-4

La posición del punto P respecto del punto fijo Q, definida por el vector $\mathbf{r}_Q$ está relacionada con la posición **r** respecto del punto O mediante la ecuación

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} + \mathbf{r}_Q$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

donde el vector $\overrightarrow{OQ}$ es fijo, es decir, no depende del tiempo. Derivando respecto del tiempo se tiene la relación de velocidades $\mathbf{v} = \mathbf{v}_Q$ y derivando de nuevo respecto del tiempo se tiene la relación de aceleraciones $\mathbf{a} = \mathbf{a}_Q$. En consecuencia, *el movimiento de una partícula es el mismo respecto de cualquier referencia fija del espacio.* Este resultado permite elegir la referencia más conveniente para el estudio del movimiento en cada caso concreto.

3.3 Caracterización geométrica de la trayectoria

En función de las características geométricas de la trayectoria, el movimiento de una partícula se pueden clasificar en: *movimiento rectilíneo, movimiento curvilíneo plano o bidimensional, y movimiento curvilíneo en el espacio o movimiento tridimensional.*

Movimiento rectilíneo. El movimiento de una partícula es *rectilíneo* cuando su trayectoria es una recta. El extremo del vector posición coincide en cada instante de tiempo t con un punto de la recta. Si **u** es el vector director de la recta, el vector $\Delta\mathbf{r}$ es proporcional a **u** siendo el coeficiente de proporcionalidad una cierta función del tiempo, figura 3-5.

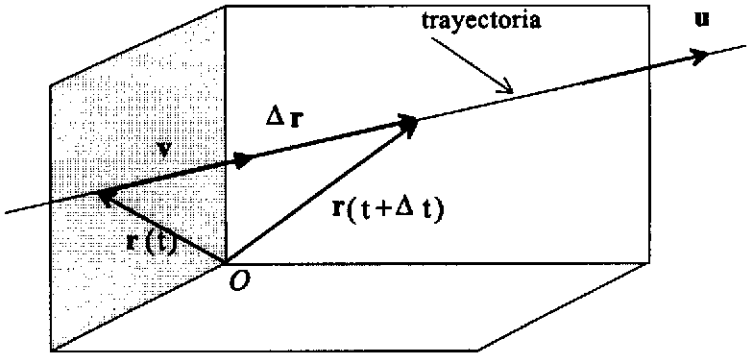


Fig.3-5

Por tanto, la velocidad **v** y su incremento $\Delta\mathbf{v}$ tiene dirección **u**, lo que implica que la aceleración **a**, que es un vector proporcional a $\Delta\mathbf{v}$, también tiene la dirección **u**. Así pues, en el movimiento rectilíneo la velocidad y la aceleración son vectores paralelos, luego su producto vectorial es cero, $\mathbf{v} \wedge \mathbf{a} = 0$. Dicha condición caracteriza genéricamente el movimiento rectilíneo de una partícula. En el caso más común, en que la trayectoria coincide con uno de los ejes de coordenadas; el vector posición **r**, la velocidad **v** y la aceleración **a** tienen todos ellos dirección constante.

Movimiento curvilíneo plano. El movimiento de una partícula es *curvilíneo plano* cuando su trayectoria es una curva plana figura 3-6, es decir, está con tenida en un plano, denomi-

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

nado el *plano del movimiento*. El extremo del vector posición **r** está constantemente sobre el plano del movimiento, luego su incremento, $\Delta\mathbf{r}$, es un vector contenido en el plano de la trayectoria. Si **u** es el vector director del plano, al ser perpendicular a $\Delta\mathbf{r}$, se cumple que el producto escalar $\mathbf{u} \cdot \Delta\,\mathbf{r} = 0$. Dividiendo por incremento de t y pasando al límite cuando el incremento del tiempo tiende a cero se tiene $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, es decir, la velocidad es un vector contenido en el plano.

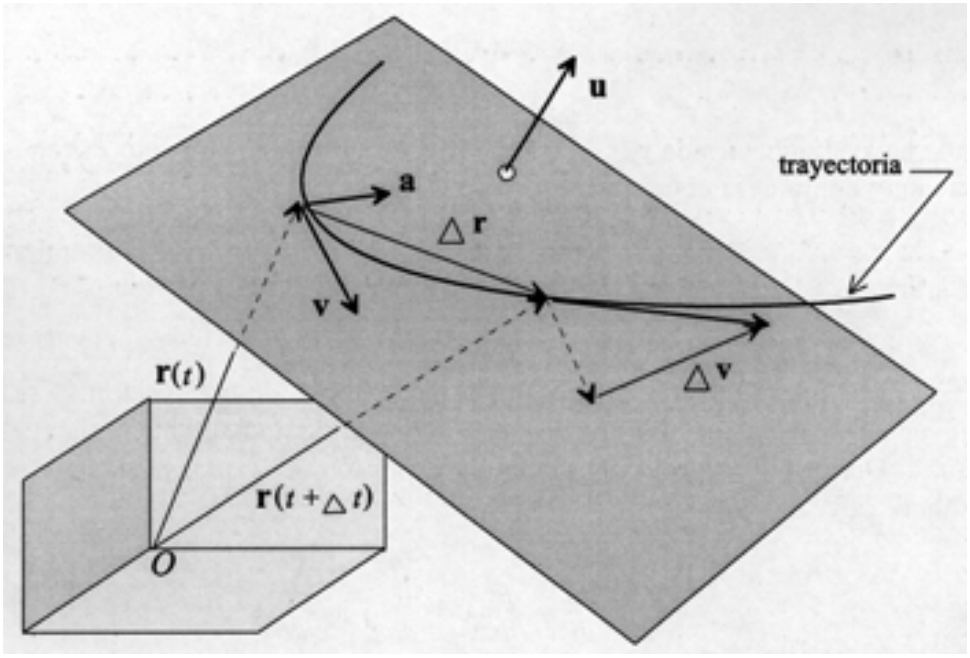


Fig. 3-6

Análogamente, si la velocidad está contenida en el plano del movimiento, su incremento entre dos instantes de tiempo también pertenece al plano, luego se cumple que $\mathbf{u} \cdot \Delta\,\mathbf{v} = 0$, de donde, por un razonamiento análogo al de la velocidad, se deduce que la aceleración **a** es coplanaria con **v**. Así pues, en el movimiento plano los vectores velocidad y aceleración están contenidos en el plano del movimiento, y por tanto, su producto vectorial ha de ser un vector de *dirección* constante. La condición $\mathbf{v} \wedge \mathbf{a} = f(t)\,\mathbf{u}$, siendo **u** un vector unitario, es la condición necesaria y suficiente para que la trayectoria de la partícula sea una curva plana. En el caso más común, el plano que contiene a la trayectoria coincide con uno de los planos de la referencia.

Movimiento curvilíneo en el espacio. El movimiento de una partícula es tridimensional cuando su trayectoria es una curva alabeada. Se denominan curvas alabeadas aquellas que no están contenidas en un plano. La velocidad **v** y la aceleración **a** son vectores con

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

direcciones arbitrarias y por tanto, su producto vectorial $\mathbf{v} \wedge \mathbf{a}$ es un vector cuyo módulo y dirección varían con el tiempo. La hélice es un ejemplo de trayectoria alabeada.

3.4. Ecuaciones del movimiento

El vector posición **r** se puede expresar en función de los vectores de la base de las coordenadas cartesianas **i**, **j**, **k** como

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \tag{3-7}$$

en donde las componentes de **r**, x, y, z son las coordenadas de su punto extremo, las cuales son funciones continuas del tiempo.

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t) \tag{3-8}$$

Las tres ecuaciones (3.8) son las ecuaciones paramétricas de la trayectoria y se denominan *ecuaciones del movimiento*. Eliminando entre ellas el tiempo se obtiene la ecuación de la trayectoria. Derivando respecto del tiempo la expresión del vector posición **r** se obtiene la expresión de la velocidad

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\,\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\,\mathbf{k} \tag{3-9}$$

Las componentes del vector **v** se denominan las *componentes rectangulares de la velocidad.*

$$v_1 = \frac{dx}{dt} \qquad v_2 = \frac{dy}{dt} \qquad v_3 = \frac{dz}{dt}$$

Derivando la expresión (2.9) de la velocidad **v** respecto del tiempo se obtiene la expresión de la aceleración en componentes

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\mathbf{k} \tag{3-10}$$

Las componentes del vector **a** se denominan las *componentes rectangulares de la aceleración.*

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$a_1 = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_2 = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad a_3 = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Las componentes de la aceleración se pueden obtener también como las derivadas primeras de las componentes de la velocidad

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} \qquad a_2 = \frac{dv_2}{dt} \qquad a_3 = \frac{dv_3}{dt} \tag{3-11}$$

El problema genérico de la Cinemática de la partícula se puede formular de la siguiente forma: *conocidas las componentes de la aceleración y las condiciones iniciales, determinar las ecuaciones del movimiento.* El proceso de cálculo implica la realización de dos integraciones: la primera proporciona las componentes de la velocidad y la segunda las ecuaciones del movimiento. Cada integral genera una constante de integración, por lo que en las ecuaciones del movimiento aparecen dos constantes de integración que se determinan con las condiciones iniciales, es decir, las coordenadas del punto posición y las componentes de la velocidad en el instante inicial $t = 0$. Estos valores son, en general, datos del problema. Si lo que se conoce son las ecuaciones del movimiento, sus derivadas primera y segunda proporcionan directamente las componentes de la velocidad y de la aceleración.

3.5 Movimiento rectilíneo

El movimiento de una partícula es rectilíneo cuando ésta se desplaza a lo largo de una línea recta. En este caso, en que la trayectoria es conocida, el problema a resolver se reduce a: dada la aceleración (o la velocidad) y las condiciones iniciales, determinar la ecuación del movimiento, es decir, determinar su posición instantánea. El origen O de la referencia lo tomaremos en un punto cualquiera de la trayectoria y uno de sus ejes (por ejemplo el eje x) coincidente con ella.

3.5.1 Clases del movimiento rectilíneo

Para los movimientos rectilineos, el vector posición de la partícula sólo tiene componente según el eje x dada por $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i}$, y en consecuencia, la velocidad y la aceleración satisfacen también la misma condición, $\mathbf{v} = v_1\,\mathbf{i}$, $\mathbf{a} = a_1\,\mathbf{i}$. Para simplificar la escritura llamaremos $a_1 \equiv a$ y $v_1 \equiv v$. A estos valores de las componentes se les denomina, aceleración y velocidad de la partícula respectivamente, teniendo en cuenta que sus valores no corresponden a los módulos de los vectores, ya que a y v pueden tener valores negativos.

El movimiento rectilineo se caracteriza por el valor de la aceleración, según que ésta corresponda a uno de los siguientes cuatro casos:

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

a) aceleración constante

b) aceleración función del tiempo t

c) aceleración función de la posición x

d) aceleración función de la velocidad v

Supuesto conocido el valor de la aceleración, veamos como se determina la ecuación del movimiento $x(t)$ en cada uno de los casos.

3.5.2 Aceleración constante

El movimiento rectilíneo con aceleración constante se denomina *movimiento uniforme o movimiento uniformemente acelerado* según que su aceleración sea cero o distinta de cero respectivamente.

Movimiento uniforme. En este movimiento la aceleración es cero, luego de la expresión genérica de la aceleración se tiene

$$a = \frac{dv}{dt} = 0 \qquad (3\text{-}12)$$

Si la derivada de la velocidad respecto del tiempo es cero, la velocidad su valor es constante, al cual llamaremos v_o que sustituido en la expresión de la velocidad queda $dx/dt = v_o$; pasando dt a multiplicar al segundo término e integrando se obtiene la expresión de la ecuación del movimiento $x = v_o t + C$, determinada salvo la constante de integración C. Si en el instante inicial $t = 0$ la partícula se encuentra en el punto de coordenada x_o, de la ecuación del movimiento se deduce que el valor de la constante es $C = x_o$. Sustituyendo la C por su valor, se tiene

$$x = v_o t + x_o \qquad (3\text{-}13)$$

En el movimiento rectilíneo uniforme, la posición es una función lineal del tiempo. Las gráficas de las figuras 3-7 y 3-8 representan la posición y la velocidad en función del tiempo. La ecuación del movimiento se puede determinar gráficamente a partir de la gráfica de la velocidad y de la posición inicial. En efecto, el área del rectángulo rayado de la figura 3-8 es $v_o t$, que coincide numéricamente con el recorrido de la partícula entre la posición inicial x_o y la posición instantánea x, expresando el área y el recorrido en las mismas unidades. Este mismo resultado se obtiene analíticamente efectuando la integración definida de la ecuación diferencial $dx = v_o dt$ entre x_o y x, posiciones de la partícula correspondientes a los

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

instantes 0 y t respectivamente.

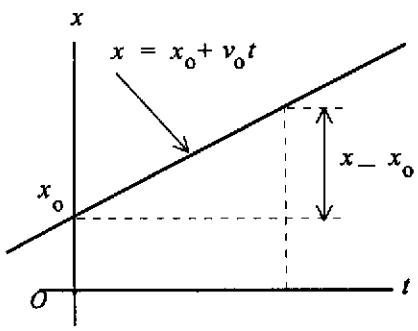


Fig. 3-7

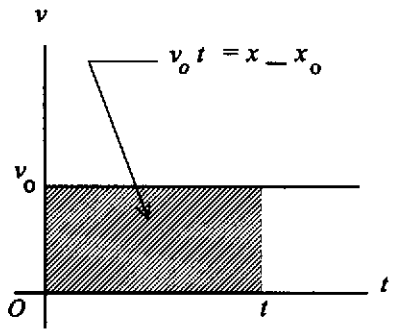


Fig. 3-8

Movimiento uniformemente acelerado. En este caso, la aceleración tiene un valor constante al cual llamaremos a_o. Cuando la aceleración **a** es de sentido opuesto a la velocidad **v**, el movimiento se denomina *uniformemente desacelerado* y el valor de a_o es negativo. La expresión genérica de la aceleración es ahora

$$\frac{dv}{dt} = a_o \tag{3-14}$$

Pasando dt a multiplicar al segundo término de la ecuación e integrando se obtiene la expresión de la velocidad $v = a_o\, t + B$ determinada salvo la constante de integración B. Integrando la ecuación de la velocidad $v = dx/dt = a_o\, t + B$ se obtiene la ecuación del movimiento

$$x = \frac{1}{2} a_o t^2 + B t + C$$

Las constantes de integración B y C se determinan con las condiciones iniciales. Si en el instante inicial $t = 0$ la partícula se encuentra en el punto $x(0) = x_o$ y la componente de velocidad inicial es $v\,(0) = v_o$, los valores de las constantes de integración son: $B = v_o$ y $C = x_o$. Sustituyendo los valores de las constantes de integración se tienen las expresiones de la posición y la velocidad instantáneas de la partícula

$$x = \frac{1}{2} a_o t^2 + v_o\, t + x_o \tag{3-15}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$v = a_o t + v_o \tag{3-16}$$

En el movimiento uniformemente acelerado, la velocidad varía linealmente con el tiempo y la posición varía con el tiempo según una parábola. Las gráficas de las figuras 3-9 y 3-10, representan la posición y la velocidad en función del tiempo. La ecuación del movimiento se puede determinar gráficamente a partir de la gráfica de la velocidad y de la posición inicial. En efecto, el área del trapecio rayado de la figura 3-10, coincide numéricamente con el recorrido de la partícula entre la posición inicial x_o y la posición instantánea x, *expresando* el área y el recorrido en las mismas unidades.

Este mismo resultado se obtiene analíticamente efectuando la integración definida de la ecuación diferencial $dx = v\,dt = (a_o t + v_o)\,dt$ entre x_o y x, posiciones de la partícula correspondientes a los instantes 0 y t respectivamente.

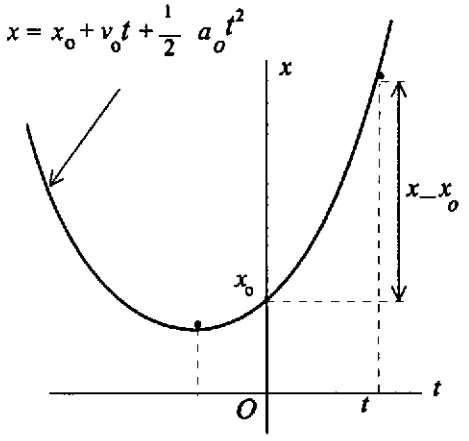


Fig . 3-9

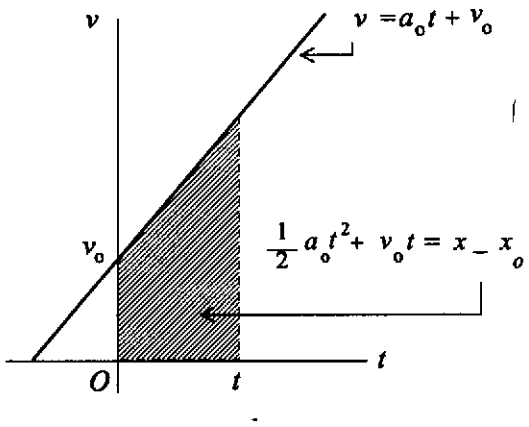


Fig. 3-10

Una relación muy útil para la resolución de problemas de la cinemática de la partícula con aceleración constante, es la que resulta de eliminar el tiempo entre las ecuaciones (3-15) y (3-16) de la posición y de la velocidad, obteniéndose una ecuación que relaciona la velocidad instantánea en función del recorrido y la aceleración dada por

$$v^2 = v_o^2 \pm 2(x - x_0)a_o \tag{3-17}$$

El signo menos corresponde a un movimiento uniformemente desacelerado.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

3.5.3 Aceleración función del tiempo

La aceleración a es función del tiempo $a = f(t)$. La expresión genérica de la velocidad se obtiene de la integración de la ecuación diferencial $dv = f(t)\,dt$

$$v = \int f(t)\,dt + A$$

La integración de la ecuación diferencial $dx = vdt$ proporciona la ecuación del movimiento

$$x = \int F(t)\,dt + A\,t + B$$

donde $F(t)$ es la primitiva de $f(t)$; A y B son constantes de integración.

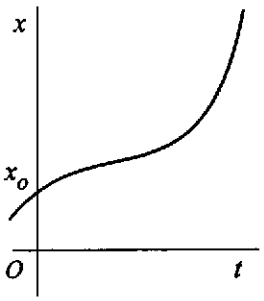


Fig. 3-11

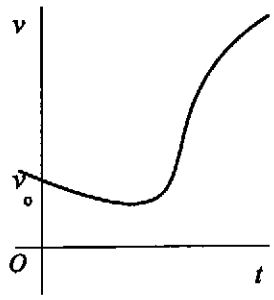


Fig. 3-12

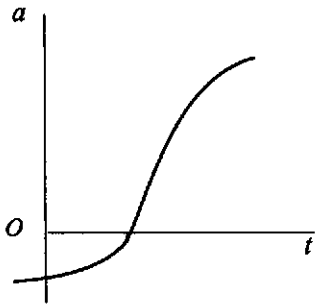


Fig. 3-13

Las figuras 3-11, 3-12 y 3-13 representan las gráficas de la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo. Las constantes de integración A y B son: $A = x_o$ y $B = v_o$.

Método gráfico. La determinación de la posición x en función del tiempo puede hacerse por un método gráfico mediante la utilización de la integración definida. La integral definida de las ecuaciones $dx = v\,dt$ y $dv = a\,dt$ entre los instantes de tiempo t_1 y t_2

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt \qquad\qquad v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt \qquad (3\text{-}18)$$

proporcionan, el recorrido de la partícula entre la posiciones x_1 , x_2 y la diferencia de velocidades que tiene la partícula en los instantes t_2 y t_1. Estos valores son respectivamente, las

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

áreas encerradas por las curvas *v(t)* y *a(t)* entre los instante de tiempo t_1 y t_2 . El recorrido de la partícula entre ambas posiciones es numéricamente igual al área S_v de la superficie bajo la curva *v(t)* entre las posiciones t_1 y t_2, figuras 3-14 y 3-15

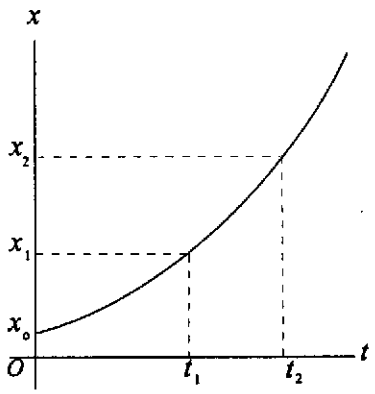


Fig. 3-14

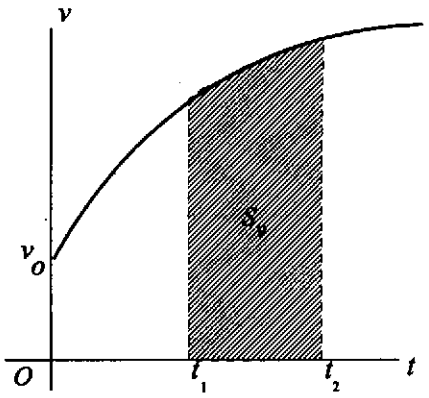


Fig. 3-15

La diferencia de velocidades es numéricamente igual al área *S ade* la superficie bajo la curva de la aceleración *a(t)* entre los instantes t_1 y t_2 , figuras 3-16 y 3-17.

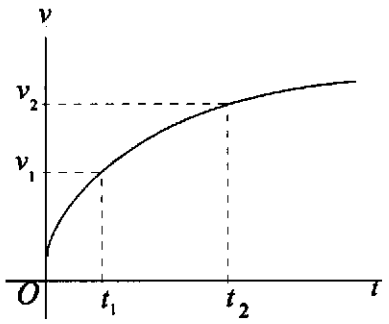


Fig. 3-16

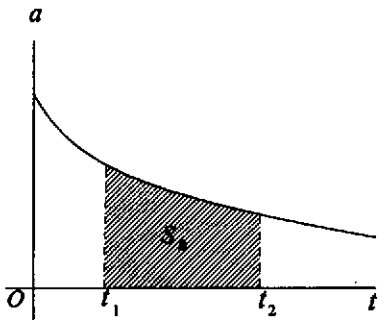


Fig. 3-17

Estas gráficas pueden ser utilizadas para la determinación de las magnitudes del movimiento. Veamos como se puede obtener la expresión de la posición *x* en función del tiempo a partir de la gráfica de la aceleración. Sean x_o y v_o la posición y la velocidad de la partícula en el instante $t = 0$. La posición instantánea se obtiene de la primera ecuación de (3-18) cambiando x_2 por *x*, y x_1 por x_o , y se obtiene

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$x = x_o + \int_o^t v\,dt = x_o + S_v(t) \qquad (3\text{-}19)$$

siendo $S_v(t)$ el área de la superficie limitada por la curva $v(t)$ entre el instante $t = 0$ y el instante t.

3.5.4 Aceleración función de la posición

La aceleración a es función de la posición, $a = f(x)$. La integración directa de la ecuación diferencial $dv/dt = f(x)$ no es posible, pero puede hacerse una sencilla transformación consistente en multiplicar y dividir el primer término de la ecuación por dx, y reagrupando términos, se obtiene la ecuación diferencial de variables separables

$$v\,dv = f(x)\,dx$$

cuya integración proporciona la componente de la velocidad en función de la posición

$$v^2 = 2\int f(x)\,dx + A \qquad (3\text{-}20)$$

Sustituyendo la expresión de la velocidad $v(x)$ en la ecuación $dx/dt = v$ y cambiando términos queda

$$dt = \frac{dx}{v(x)}$$

cuya integración proporciona la posición x como función implícita del tiempo t.

$$t = \int \frac{dx}{v} + B \qquad (3\text{-}21)$$

Las constantes de integración A y B se determinan con las condiciones iniciales. En el caso de que el dato conocido sea la gráfica $v(x)$, se puede determinar geométricamente a partir de ella el valor de la aceleración. La pendiente de la tangente a la curva $v(x)$ en el punto genérico P, es la derivada de v respecto de x, $dv/dx = \text{tg}\,\beta$. Dividiendo el numerador y el denominador por dt se tiene $\text{tg}\,\beta = a/v$. Trazando la perpendicular a la tangente en el punto P, ésta forma con la distancia desde el punto P al eje de abcisas el ángulo β, figura 3-18. El

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

segmento *PM* es el valor de la velocidad en el punto *P*, luego el segmento *MN* es el valor de la aceleración en dicho punto.

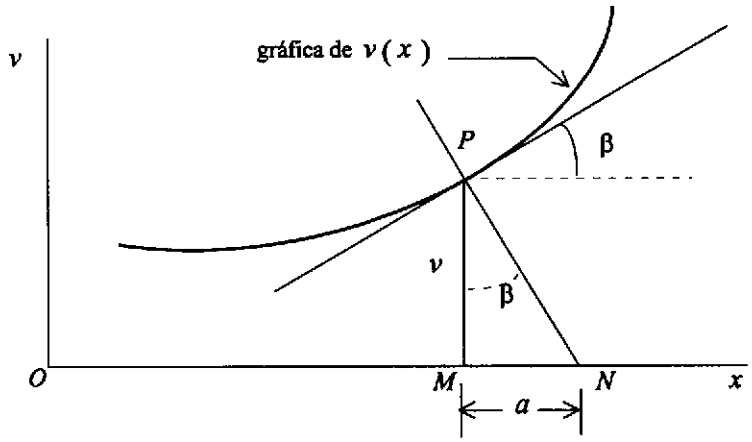


Fig. 3-18

3.5.5 Aceleración función de la velocidad

La aceleración *a* es función de la velocidad *v*, $a = f(v)$. La integración de la ecuación diferencial $dt = dv/f(v)$ da la velocidad *v* como una función implícita del tiempo *t*

$$t = \int \frac{dv}{f(v)} + A \qquad (3\text{-}22)$$

Una vez determinada la expresión de $v(t)$, integrando la ecuación $dx = v(t)\,dt$ se obtiene la ecuación del movimiento

$$x = \int v(t)\,dt + B \qquad (3\text{-}23)$$

Las constantes de integración *A* y *B* se determinan con las condiciones iniciales.

3.5.6 Movimiento simultáneo de partículas

Una situación frecuente en el movimiento de los cuerpos es que sean varios los objetos que están en movimiento simultáneo respecto de una referencia dada. Consideremos el caso de dos partículas que se mueven sobre la misma recta, figura 3-19

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

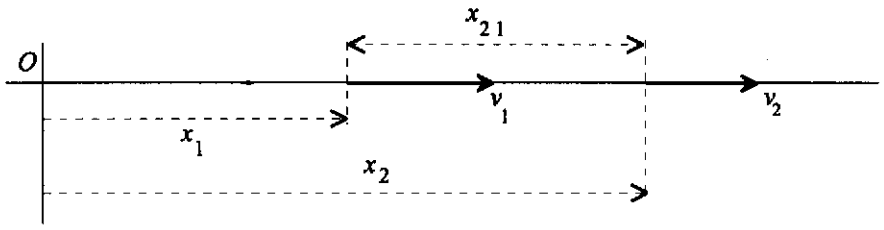


Fig. 3-19

Sean x_1 y x_2 las posiciones instantáneas de ambas partículas respecto del origen O. La diferencia entre ellas $x_{21} = x_2 - x_1$ se denomina *posición relativa* de la partícula 2 respecto de la 1. Derivando respecto del tiempo la ecuación que define la posición relativa, el segundo término es la diferencia de velocidades de ambas partículas, que es la *velocidad relativa* de la partícula 2 respecto de la 1

$$\mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$$

De una manera análoga, se tiene que la *aceleración relativa*

$$\mathbf{a}_{21} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$$

Consideremos ahora el caso en que dos o más partículas, cuyos desplazamientos posibles son rectilíneos y paralelos, están relacionadas entre sí mediante vínculos que condicionan sus posiciones. Sus movimientos son interdependientes, y las velocidades y aceleraciones de las partículas no tienen valores cualesquiera si no que están relacionadas por ecuaciones derivadas de los vínculos existentes entre las posiciones de las partículas. Las ligaduras entre las posiciones determinan las ecuaciones entre las velocidades y éstas, a su vez, las ecuaciones entre las aceleraciones.

En la figura 3-20 se representa un conjunto de dos poleas y tres cuerpos unidos entre sí por cuerdas inextensibles. La longitud de la cuerda entre el cuerpo 1 y el centro de la polea móvil es constante, así como la longitud de la cuerda que une el cuerpo 2 con el cuerpo 3 a través de la polea móvil.

Los movimientos de los tres cuerpos, así como el de la polea móvil, son rectilíneos verticales. Para fijar sus posiciones tomaremos el origen en un punto del nivel horizontal que pasa por el centro de la polea fija con el eje de las x positivo en sentido descendente. Las posiciones cumplen:

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$x_1 + x = \text{constante} \tag{3-24}$$

$$x_2 + x_3 - 2x = \text{constante} \tag{3-25}$$

Derivando respecto del tiempo y sustituyendo se tienen las ecuaciones de las componentes de las velocidades

$$2v_1 + v_2 + v_3 = 0 \tag{3-26}$$

Derivando de nuevo se obtiene la ecuación de las aceleraciones

$$2a_1 + a_2 + a_3 = 0 \tag{3-27}$$

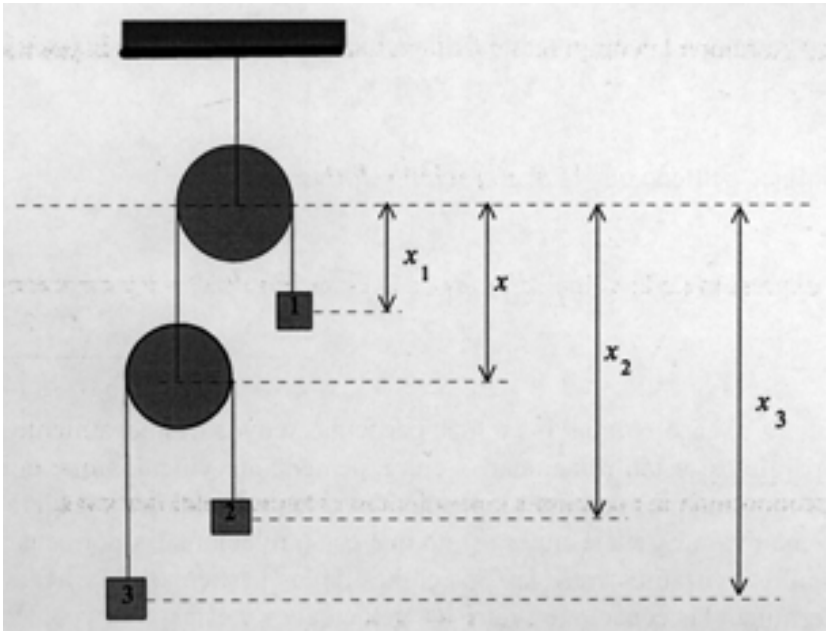


Fig. 3-20

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 3.1

El movimiento rectilíneo de una partícula esta definido por su vector posición según la expresión $\mathbf{r} = (2 + 4t - 2t^2)\,\mathbf{i}$ m. Determinar :
a) su velocidad y aceleración
b) el tiempo transcurrido hasta que la partícula pasa por el origen y la distancia recorrida

SOLUCIÓN

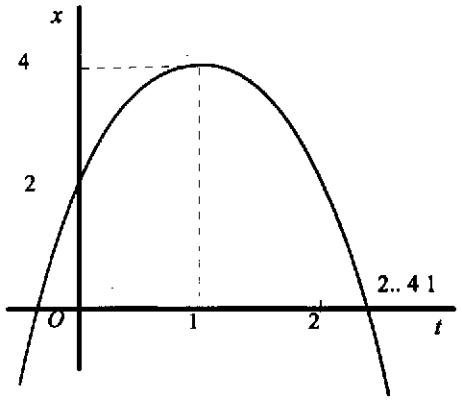
a) Cuando el vector posición es una función conocida del tiempo su componente es la ecuación del movimiento *x(t)*. Para el dato del problema se tiene

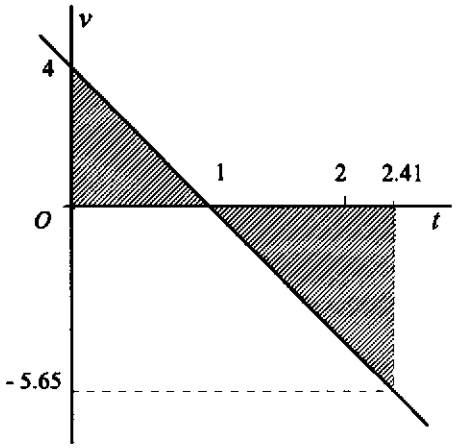
$$x(t) = 2 + 4t - 2t^2 \text{ m}$$

La velocidad es la derivada de x respecto del tiempo $\quad v(t) = 4 - 4t \text{ ms}^{-1}$

La aceleración es la derivada de la velocidad respecto del tiempo $\quad a(t) = -4 \text{ ms}^{-2}$

El movimiento es uniformemente desacelerado hasta el instante $t = 1$ s. Para valores de tiempo t mayores que 1 s. el movimiento es acelerado.





b) En el instante inicial $t = 0$ la partícula se encuentra a 2 m del origen moviéndose con una velocidad de 4 ms^{-1}. Volverá a pasar por el origen en el instante en que x sea cero. Igualando *x(t)* a cero

$$2 + 4t - 2t^2 = 0 \;, \quad \text{de donde} \quad t = 1 + \sqrt{2} \text{ s}$$

En el instante $t = 1$ s la velocidad de la partícula es cero y se encuentra a 4 m del origen. En dicha posición invierte el sentido del movimiento y vuelve hacia el origen recorriendo en total 6 m. El área de la superficie rayada son 6 m^2, que coincide numéricamente con el recorrido de la partícula desde el instante $t = 0$ hasta el instante $t = 2{,}41$ s en que pasa de nuevo por el origen.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 3.2

Un coche inicia su movimiento con una aceleración de 6 ms^{-2} que la mantiene durante 4 s. En los siguientes 8 s se mueve con velocidad constante y después, aplicando los frenos, desacelera a razón de 10 ms^{-2} hasta parase. Determinar :

a) la velocidad cuando el movimiento es uniforme

b) la distancia total recorrida

c) la gráfica *v-t*, comprobando que el área encerrada por la curva y el eje del tiempo es numéricamente igual a la distancia recorrida.

SOLUCIÓN

a) La velocidad constante con que se mueve el coche durante 8 s es la velocidad final adquirida durante los primeros 4 s en los que el movimiento es uniformemente acelerado. La velocidad es igual a la aceleración por el tiempo, luego su valor es de 24 ms^{-1}

b) La distancia recorrida en los primeros 4 s es $x_1 = 1/2\ a\ t^2 = 48$ m

La distancia recorrida a velocidad constante es $x_2 = v\ t = 192$ m.

La distancia recorrida desacelerando hasta parase se obtiene de $0 = v^2 - 2\ a\ x_3$, de donde el valor de x_3 es

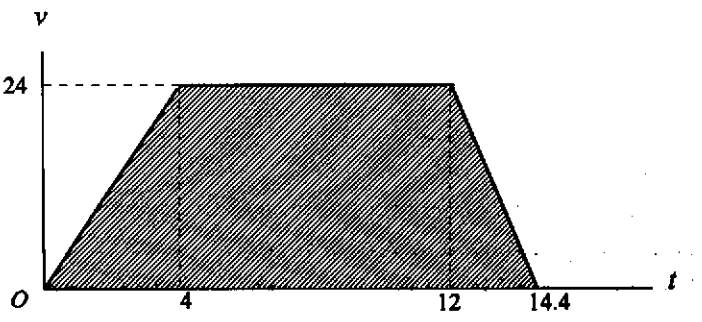
$$x_3 = 28{,}8 \text{ m.}$$

El tiempo de desaceleración se obtiene de $0 = 24 - 10\ t_3$, de donde $t_3 = 2.4$ s.

La distancia total recorrida es $x = x_1 + x_2 + x_3 = 268{,}8$ m.

c) Gráfica *v-t*

El área de la zona rayada es 268,8 m^2, que coincide numéricamente con el recorrido total del coche.



© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

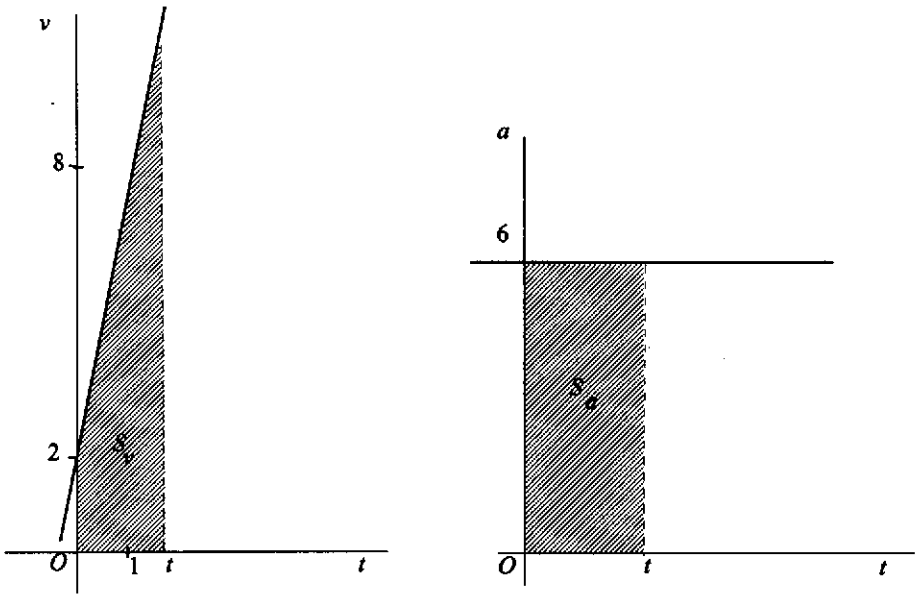
www.elsolucionario.net

PROBLEMA 3.3

Una partícula se mueve a lo largo de una recta con aceleración constante $a_o = 6\ ms^{-2}$. En el instante inicial $t = 0$ su posición y velocidad son $x_o = 1$ m y $v_o = 2\ ms^{-1}$.
Determinar su velocidad y posición: a) gráficamente, b) por integración

SOLUCIÓN

a) Gráficamente



b) Integrando la ecuación $dv = a_o\ dt$ se obtiene la velocidad $v = 6\ t + A$. El valor de la constante de integración es $A = 2$. La velocidad en función del tiempo es

$$v = 6\ t + 2$$

Integrando $dx = (6\ t + 2)\ dt$ se obtiene la posición $x = 3\ t^2 + 2\ t + B$. La constante vale $B = 1$. La ecuación del movimiento es

$$x = 3\ t^2 + 2\ t + 1$$

De la gráfica de la aceleración se deduce el valor del área $S_a = 6\ t$, es igual a la diferencia de velocidades correspondientes a los instantes t y $t = 0$, cuyo valor es 2. Igualando se tiene la velocidad en el instante t, $v = 6\ t + 2$, cuya gráfica es la dibujada en la figura adjunta.
El área $S_v = 1/2\ (v + 2)\ t$ es igual a la diferencia entre la posición x de la partícula en el instante t y la posición en el instante inicial $t = 0$, que es 1 m. Igualando, sustituyendo el valor de v, y despejando la posición, se tiene la ecuación del movimiento $x = 3\ t^2 + 2\ t + 1$

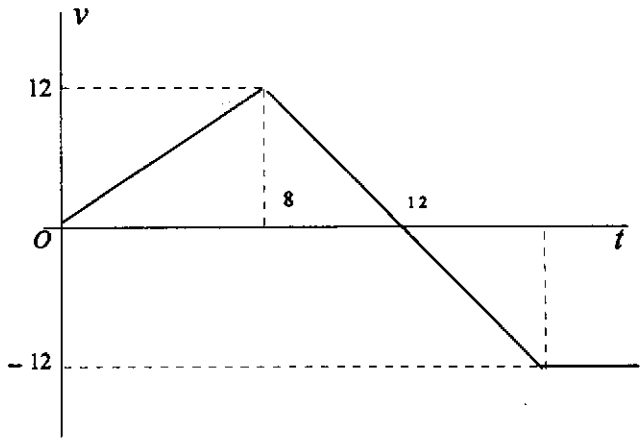
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

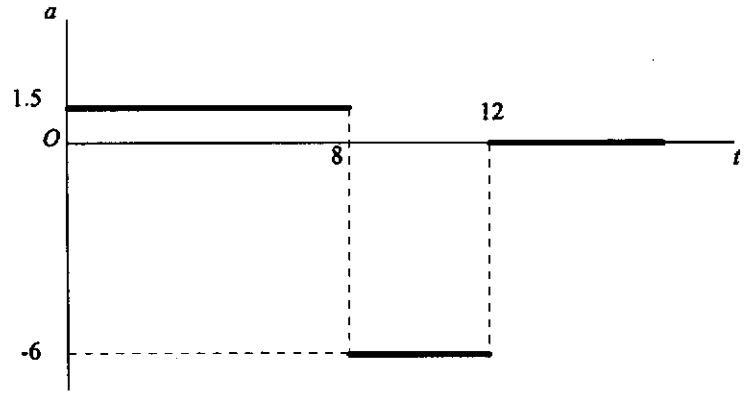
PROBLEMA 3.4

La velocidad de una partícula cuyo movimiento es rectilineo varía en función del tiempo según la gráfica adjunta. En el instante inicial la partícula se encuentra a –12 m del origen.
Determinar:
a) las gráficas *a-t* y *x-t* en el intervalo $0 < t < 16$ s
b) los instantes en que la partícula pasa por el origen



SOLUCIÓN

a) La aceleración es la pendiente de la tangente en cada uno de los puntos de la gráfica de la velocidad. De las pendientes de la gráfica de la velocidad se deduce que entre 0 y 8 s la aceleración es de 1,5 ms^{-2}, entre 8 y 12 s la aceleración es de – 6 ms^{-2}, y, a partir de los 12 s, la aceleración es nula.

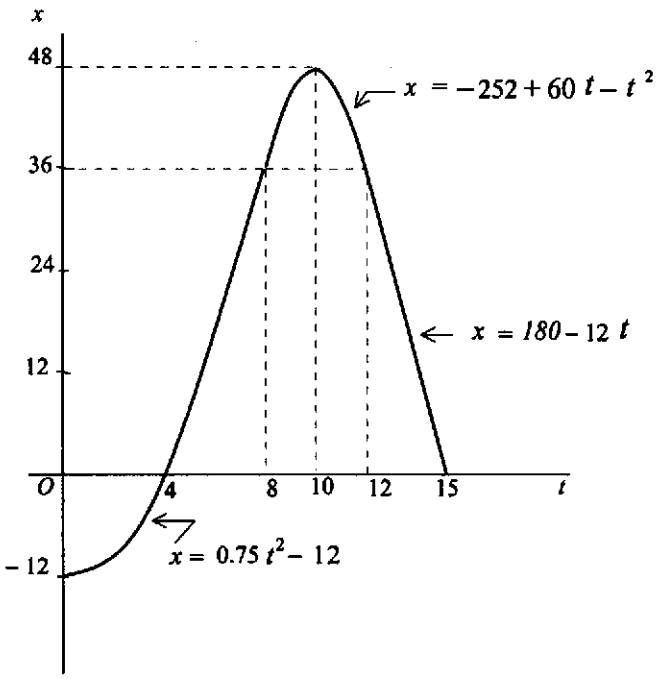


Determinación de la gráfica *x-t*.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



De la gráfica *v-t* se deduce que la velocidad de la partícula entre $t = 0$ y $t = 8$ s está dada por $v = 1.5\,t$
La posición de la partícula para un instante t comprendido entre 0 y 8 s está dada por

$$x + 12 = 1/2\ v\,t = 1/2\ (1.5\,t)\,t = 3/4\ t^2 \qquad \text{de donde} \qquad x = -12 + 3/4\ t^2$$

Para $t = 8$ s la posición es $x = 36$ m. Entre $t = 8$ y $t = 12$ s la velocidad es

$$v = 12 - 6\,(t - 8) = 60 - 6\,t$$

La velocidad se hace igual a cero para $t = 10$ s. La posición para un instante t, tal que $8 < t < 12$, está dada por

$$x - 36 = 12 + \tfrac{1}{2}\,(t - 10)\,v$$

y operando queda

$$x = -252 + 60\,t - 3\,t^2$$

Para el instante $t = 12$ s la posición es 36 m. La posición para valores de $t > 12$ está dada por

$$x - 36 = (-12)\,(t - 12) \qquad \text{de donde} \qquad x = 180 - 12\,t$$

b) La partícula pasa por el origen en los instante

$$t = 4 \text{ s} \quad \text{y} \quad t = 15 \text{ s}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 3.5

En el instante $t = 10$ s una partícula cuya trayectoria es rectilinea y su aceleración constante, se encuentra a 80 m del origen de coordenadas, moviéndose con una velocidad de -12 m/s. Si en el instante inicial se encontraba en el origen, determinar :

a) la velocidad y la aceleración iniciales

b) la distancia recorrida hasta el instante $t = 10$ s

c) dibujar las gráficas $x(t)$ y $v(t)$

SOLUCIÓN

a) En el instante inicial la partícula estaba en el origen, luego $x_o = 0$. La ecuación del movimiento de la partícula es

$$x = v_o t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

y su velocidad está dada por

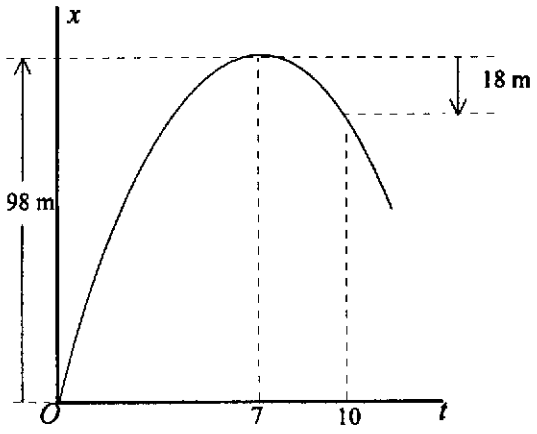
$$v = v_o + a t$$

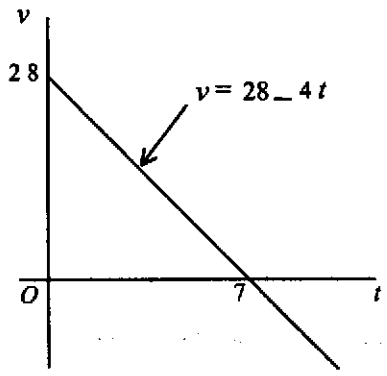
Sustituyendo los valores para $t = 10$ s queda

$$80 = 10 v_o + 50 a \qquad -12 = v_o + 10 a$$

Resolviendo el sistema se obtiene $v_o = 28$ m/s y $a = -4$ m/s^2

b) La partícula inicialmente se aleja del origen con un movimiento uniformemente retardado hasta pararse. Después vuelve hacia el origen con un movimiento uniformemente acelerado. El instante en que se para se determina igualando a cero su velocidad, $0 = 28 - 4t$. Luego el instante en se para es $t_1 = 7$ s. La distancia recorrida hasta ese instante es $x_1 = 98$ m. A partir de este instante su movimiento es uniformemente acelerado y la distancia recorrida hasta los 10 s es $x_2 = 18$ m. La distancia total recorrida hasta los 10 segundos es de 116 m.





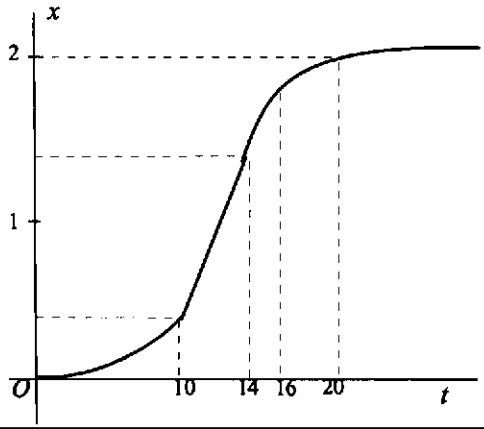
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 3.6

El movimiento de una partícula es rectilíneo. La gráfica adjunta muestra el recorrido x en función del tiempo, x en m. y t en s. Determinar: a) la velocidad media, b) la velocidad máxima, c) el instante en que la velocidad coincide con la velocidad media, d) la aceleración media en los primeros 10 segundos, e) la aceleración media entre $t = 10$ y $t = 16$ segundos



SOLUCIÓN

a) De la gráfica se deduce que la partícula en 20 segundos ha recorrido 2,0 m. La velocidad media es el desplazamiento, que en este caso coincide con el recorrido dividido por el tiempo

$$v_{me} = \frac{2.0}{20} = 0,1\, ms^{-1}$$

b) La velocidad instantánea $v(t)$ de la partícula es la pendiente de la tangente a la gráfica x-t en cada uno de sus puntos. De la gráfica se deduce que las tangentes en los instantes $t = 0$ y $t = 20$ son rectas horizontales, luego la velocidad en dichos instantes es nula, $v\,(0) = v\,(20) = 0$. La pendiente crece entre $t = 0$ y $t = 10$ s, instante a partir del cual la gráfica tiene un tramo recto hasta el instante $t = 14$ s, decreciendo a continuación hasta alcanzar el valor cero en $t = 20$ s. La partícula tiene velocidad máxima durante el tramo recto de la gráfica y su valor coincide con la pendiente de dicho tramo

$$v_{max} = 0,25\ \text{ms}^{-1}$$

c) La tangente a la curva en el punto correspondiente a $t = 16$ es igual a 0,1 m, que coincide con el valor de la velocidad media.

d) La aceleración media en los 10 primeros segundos es la diferencia de velocidades en los extremos del intervalo dividida por el tiempo $a_{me} = 0,025\ \text{ms}^{-2}$

e) La aceleración media entre los 10 y los 16 segundos es

$$a_{me} = -0,025\ \text{ms}^{-2}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 3.7

En un vehículo en movimiento, desde el instante en que se percibe una señal de parar hasta que se acciona el freno transcurre un tiempo, denominado tiempo de reacción, del orden de 0.5 s. Si la desaceleración máxima de un automovil es de 8 ms^{-2} y debe quedar parado despues de recorrer 4 m, determinar:
a) la velocidad máxima a la cual debe circular
b) la distancia recorrida durante el frenado
c) el tiempo de frenado

SOLUCIÓN

a) Sea v_o la velocidad a la cual se circula cuando se percibe la señal de parar. La distancia recorrida hasta el instante de aplicar el freno está dado por

$$x_o = 0,5\ v_o \tag{1}$$

La velocidad final es nula, luego de la ecuación (2.15) se tiene

$$0 = v_o^2 - 16\ (x - x_o) \tag{2}$$

en donde x es la distancia recorrida mientras se está frenando. La distancia total recorrida hasta pararse es de 4 m, luego

$$x + x_o = 4 \tag{3}$$

Sustituyendo (1) y (3) en (2) se tiene

$$v_o^2 + 16\ v_o - 64 = 0 \tag{4}$$

Resolviendo la ecuación (4) se obtiene el valor de la velocidad máxima

$$v_o = 3,31\ ms^{-1} = 12\ km/h$$

b) La distancia recorrida mientras se aplica el freno es

$$x = 4 - x_o = 2,35\ m.$$

c) El tiempo de frenado es $$t = \frac{3,31}{8} = 0,4\ s$$

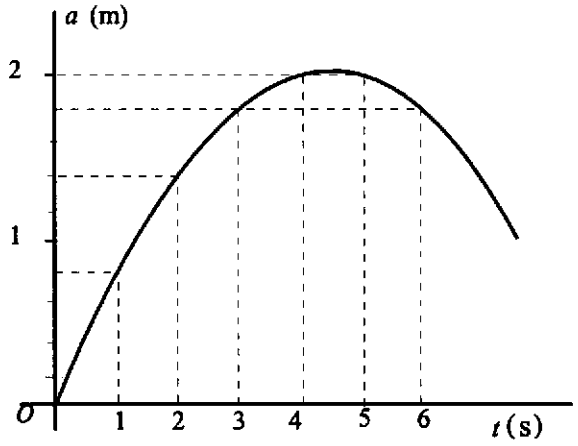
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 3.8

La gráfica de la figura es la aceleración en función del tiempo de una partícula cuyo movimiento es rectillíneo. En el instante inicial la partícula se encuentra en el origen y su velocidad es $v_o = 5$ ms^{-1}. Determinar: a) el espacio recorrido hasta $t = 4$ s, b) el instante en que la velocidad tiene el mismo valor que en el orígen



SOLUCIÓN

a) La aceleración *a(t)* es una parábola que pasa por el origen de coordenadas y cuyo eje de simetría está en $t = 4.5$ s. La ecuación de la parábola es

$$a = m\,t + n\,t^2$$

en donde m y n son coeficientes. De los datos de la anterior figura se tiene

$$m + n = 0.8$$

$$2\,m + 8\,n = 1$$

Resolviendo el sistema se tiene $m = -0.1$ y $n = 0.8$. La expresión de la aceleración en función del tiempo es

$$a = -0.1\,t^2 + 0.9\,t$$

Integrando $dv = a\,dt$ se obtiene la velocidad: $v = -0.1/3\,t^3 + 0.45\,t^2 + 5$

Integrando la velocidad se obtiene la posición: $x = -0.1/12\,t^4 + 0.15\,t^3 + 5\,t$

Para $t = 4$ s, $x\,(4) = 27{,}46$ m

b) El valor de la velocidad vuelve a ser de 5 m/s en el instante $t = 13{,}5\ s$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 3.9

Una partícula con movimiento rectilíneo tiene una velocidad dada por $v = 20 - 5x$ ms^{-1}. En el instante inicial la partícula se encuentra en el origen. Determinar :
a) la ecuación del movimiento
b) la aceleración en función del tiempo
c) instante en que la velocidad es nula y el espacio recorrido hasta parase

SOLUCIÓN

a) Integrando la ecuación $dx = v\,dt = (20 - 5x)\,dt$ se tiene

$$t = \int \frac{dx}{(20 - 5x)} + C = -\frac{1}{5}\ln(20 - 5x) + C$$

En el instante inicial la partícula se encuentra en el origen de coordenadas, luego $C = 1/5 \ln 20$. Sustituyendo y despejando la x en función del tiempo queda

$$x = 4\,(1 - e^{-5t})$$

b) Derivando dos veces la posición se obtiene la aceleración en función del tiempo

$$a = -5\,e^{-5t}$$

c) Sustituyendo la ecuación del movimiento en la expresión de la velocidad se tiene la velocidad en función del tiempo

$$v = e^{-5t}$$

La velocidad se anula para $t = \infty$. En dicho instante la aceleración también es nula, luego la partícula se para. El espacio recorrido hasta pararse es

$$x(\infty) - x(0) = 0,2\ m\ \text{m}$$

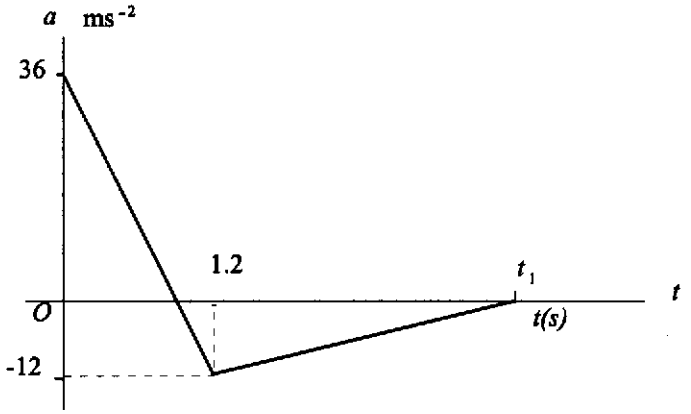
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 3.10

Una partícula se encuentra inicialmente en reposo. Empieza a moverse con una aceleración que varía con el tiempo según la gráfica adjunta y termina por volver al reposo en el instante t_1. Determinar: a) el instante t_1 en que se para, b) la distancia recorrida hasta pararse.



SOLUCIÓN

a) Determinemos primero el punto de corte de la aceleración con el eje de los tiempos. La recta que pasa por los puntos (0, 36) y (12, –12) está dada por $a = 36 - 40\,t$, de donde la aceleración es nula en el instante $t = 0{,}9$ s. La aceleración instantánea de la partícula es $a = dv/d\,t$, de donde

$$v = \int_0^t a\,dt$$

Si en el instante t_1 la partícula está en reposo se ha de cumplir que $\int_0^t a\,dt = 0$.

Aplicando una de las propiedades de la integración definida queda

$$\int_0^{0.9} a\,dt + \int_{0.9}^{t} a\,dt = 0$$

cuyos valores son las áreas $\qquad 16{,}2 + \frac{1}{2}\,(t_1 - 0{,}9)\,(-12) = 0$

De los triángulos definidos por la gráfica de la aceleración se tiene

$$t_1 = 3{,}6 \text{ s}$$

b) La distancia recorrida hasta el instante $t = 0{,}9$ s está dada por $x_1 = (\,0{,}9 - t_{C1}\,)\,S_1$, en donde $S_1 = 16{,}2$ y t_{C1} es la abcisa del centro del área definida por los instantes $t = 0$ y $t = 0{,}9$ s. El área es un triángulo, luego $t_{C1} = 0{,}3$ s. Sustituyendo queda $x_1 = 9{,}72$ m. Para el cálculo de la distancia recorrida

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

hasta el instante 1,2 s hay que tener en cuenta que la velocidad para $t = 0{,}9$ s es $v\,(0{,}9) = 16{,}2$ m s^{-1}.

Se tiene $x\,(1{,}2) = x_1 + 16{,}2 \cdot 0.3 + (1{,}2 - t_{C2})\,S_2$

siendo $t_{C2} = 1{,}1$ s y $S_2 = -\ 1{,}8$ m^2

Sustituyendo queda $x_2 = 14{,}40$ m.

Para el cálculo de la distancia recorrida hasta el instante 3,6 s hay que tener en cuenta que la velocidad para $t = 1{,}2$ s es $v(1{,}2) = 14{,}4$ ms^{-1}

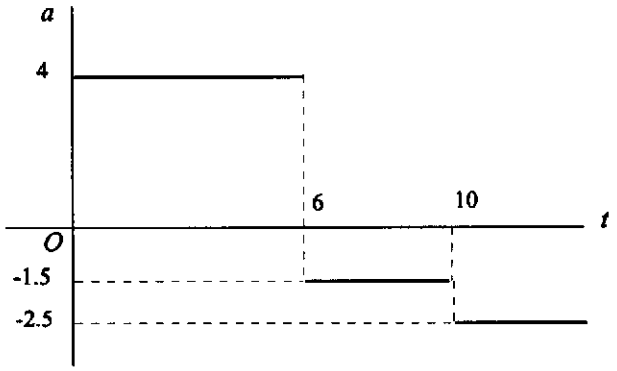
$$x\,(3.6) = 14{,}40 + 14{,}4 \cdot 2{,}4 + (3{,}6 - t_{C3})\,S_3$$

siendo $t_{C3} = 2{,}0$ s y $S_3 = -\ 14{,}4$ m^2

Sustituyendo queda $x(3{,}6) = 25{,}92$ m

PROBLEMA 3.11

Una partícula tiene un movimiento rectilíneo cuya aceleración se representa en la figura. En el instante inicial se encuentra en el origen y su velocidad es de – 8 ms^{-1}. Determinar su posición en los instantes $t = 6$ s, $t = 10$ s y $t = 14$ s. Determinar los instantes en que vuelve a pasar por el origen y los espacios recorridos.



SOLUCIÓN

Calculemos las posiciones utilizando la ecuación (3-18). Es necesario conocer las velocidades al principio de cada tramo cuyos valores son $v(0) = -8$ m/s, $v(6) = 16$ m/s y $v(10) = 10$ m/s. Las coordenadas de los centros de los rectángulos definidos por cada uno de los tres tramos de aceleración constante son 3, 8 y 12, y sus áreas 24, 6 y 10 respectivamente.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Posición en el instante $t = 6$; $x(6) = (-8)\,6 + (6-3)\,24 = 24$ m

Posición en el instante $t = 10$; $x(10) = 24 + 16\,(4) - (10-8)\,6 = 76$ m

Posición en el instante $t = 14$; $x(14) = 76 + 10\,(4) - (14-12)\,10 = 96$ m

Ecuaciones del movimiento:

En el intervalo $0 \le t \le$ es $x = -8t + 2t^2$.

Esta ecuación se anula para $t = 4$ s, instante en que la partícula se encuentra de nuevo en el origen. La distancia recorrida hasta dicho instante es $s_1 = 16$ m.

En el intervalo $6 \le t \le 10$ es $x = 24 + 16\,(t-6) - 0.75\,(t-6)^2$

En el intervalo $10 \le t \le 14$ es $x = 76 + 10\,(t-10) - 1.25\,(t-10)^2$ (1)

Esta ecuación se anula para $t = 22{,}76$ s, instante en que la partícula se encuentra otra vez en el origen. El recorrido de la partícula entre $t = 4$ y $t = 14$ s es $s_2 = 96$ m, valor que coincide con la posición más alejada del origen y es, por tanto, el vértice de la parábola (1); esta distancia es la que recorrerá hasta pasar de nuevo por el origen. El recorrido total de la partícula es

$$s = s_1 + 2\,s_2 = 208 \text{ m}$$

PROBLEMA 3.12

La aceleración de una partícula cuyo movimiento es rectilíneo está dada por $a = -3x$, donde x es la posición. La velocidad en el origen es $3^{1/2}$ m/s y en el instante inicial su posición es $x = -1$ Determinar: la posición, la velocidad y la aceleración en función del tiempo.

SOLUCIÓN

La expresión de la aceleración se puede escribir como

$$\frac{dv}{dx}\frac{dt}{dt} = -3x \text{ que operando se transforma en } v\,dv = -3x\,dx$$

Integrando se obtiene la velocidad en función de la posición

$$v^2 = -3x^2 + \text{cte.}$$

Cuando la partícula se encuentra en el origen de coordenadas su velocidad es $\sqrt{3}$ m/s, luego

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

sustituyendo en la expresión de la velocidad , la constante de integración es igual a 3. La velocidad en función de la posición es

$$v^2 = 3(1 - x^2)$$

La velocidad es la derivada de la posición respecto del tiempo; operando se tiene

$$\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \sqrt{3}\, dt$$

Integrando se tiene $x = \text{sen}(\sqrt{3}\ t + cte)$

De la condición inicial $t = 0$, $x = -1$, se tiene que el valor de constante es $-\pi/2$. La ecuación del movimiento es

$$x = \text{sen}(\sqrt{3}\ t - \frac{\pi}{2})$$

Las derivadas primera y segunda de x respecto del tiempo, proporcionan la velocidad y la aceleración respectivamente

$$v = \sqrt{3}\ \cos(\sqrt{3}\ t - \frac{\pi}{2})$$

$$a = -3\ \text{sen}(\sqrt{3}\ t - \frac{\pi}{2})$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 3.13

Una partícula se mueve a lo largo de una recta con una aceleración $a = 9\,x\ \text{ms}^{-2}$. En el instante inicial su posición es $x_o = 1$ m y su velocidad $v_o = 3\ \text{ms}^{-1}$.
Determinar :
a) la ecuación del movimiento
b) la velocidad en función del tiempo

SOLUCIÓN

a) La aceleración se puede expresar como $a = dv/dx$. Sustituyendo el valor de la aceleración e integrando se tiene

$$v^2 = 9x^2 + A$$

De las condiciones iniciales se deduce que la constante de integración $A = 0$, de donde queda para la velocidad $v = 3\,x$. Sustituyendo $v = dx/dt$ e integrando se tiene

$$x = Be^{3t}$$

Con las condiciones, la constante de integración queda $B = 1$ y la ecuación del movimiento es

$$x = e^{3t} \quad \text{m}$$

b) Derivando x respecto de t se tiene la velocidad en función del tiempo

$$v = 3e^{3t} \quad \text{ms}^{-1}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 3.14

Una partícula cuyo movimiento es rectilíneo con aceleración $a = 3\,(v+1)^{1/2}\ \text{ms}^{-2}$ se encuentra en el instante 1 s en la posición $x(1) = 1$ m moviéndose con una velocidad $v\,(1) = 3\ \text{ms}^{-1}$ Determinar: a) la posición y la velocidad en función del tiempo, b) los valores de la posición, la velocidad y la aceleración para $t = 3$ s .

SOLUCIÓN

a) Integrando la expresión de la aceleración $dv = a\,dt$ se tiene

$$t = \frac{1}{3}\int \frac{dv}{\sqrt{v+1}} + C_1 \qquad t = \frac{2}{3}\sqrt{v+1} + C_1 \qquad C_1 = -\frac{1}{3}$$

Operando y sustituyendo queda

$$v(t) = \frac{1}{4}(9t^2 + 6t - 3)$$

De $dx/dt = v$ se obtiene

$$x = \int v(t)\,dt + C_2 \qquad x(t) = \frac{3}{4}(t^3 + t^2 - t) + C_2 \qquad C_2 = \frac{1}{4}$$

La ecuación de la posición es

$$x(t) = \frac{3}{4}(t^3 + t^2 - t) + \frac{1}{4}$$

b) Los valores pedidos son :

$$a\,(3) = 6\ \text{ms}^{-2} \qquad v\,(3) = 24\ \text{ms}^{-1} \qquad x\,(3) = 25\ \text{m}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 3.15

Dos partículas se mueven sobre la misma recta habiendo iniciado sus movimientos simultáneamente. La partícula 1 esta inicialmente en reposo pero tiene una aceleración de 1 ms^{-2} durante los primeros 3 s. Entre los 3 y los 9 s su aceleración es nula y, a apartir de este instante, su aceleración tiene el valor inicial. La segunda partícula tiene una velocidad inicial de 8 ms^{-1} y una aceleración de − 0,5 ms^{-2} durtante los primeros 5 s; a continuación se anula y vuelve a tener el valor inicial a partir del segundo 10. Determinar :

a) el instante t en que ambas partículas tienen la misma velocidad

b) el valor de dicha velocidad

c) gráfica *v-t*

SOLUCIÓN

a) La velocidad de la partícula 1 en función del tiempo es

$$v_1 = \int a\,dt = \int_0^3 dt + \int_9^t dt = 3 + (t - 9) \qquad \text{para } t \geq 9$$

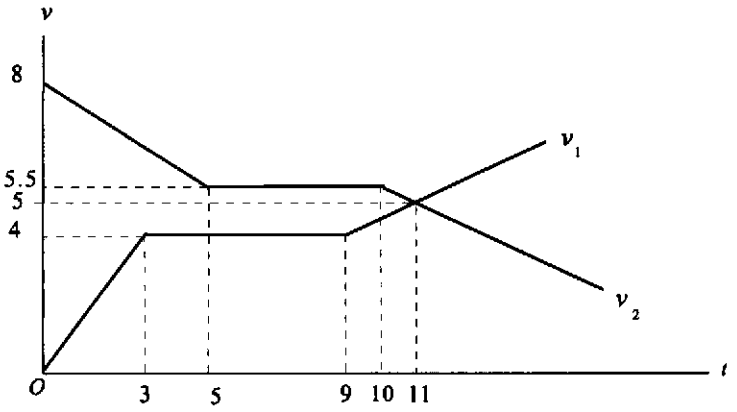
La velocidad de la partícula 2 en función del tiempo es

$$v_2 = 8 + \int_0^5 (-0.5)\,dt + \int_{10}^t (-0.5)\,dt = \frac{21}{2} - \frac{1}{2}t \qquad \text{para } t \geq 10$$

Igualando ambas expresiones de la velocidad se tiene la ecuación $\frac{21}{2} - \frac{t}{2} = 3 + (t - 9)$ cuya solución en t = 11 s, instante en que ambas velocidades tienen un valor común.

b) El valor común de la velocidad en este instante es de 5 ms^{-1} .

c) Gráficas *v-t*



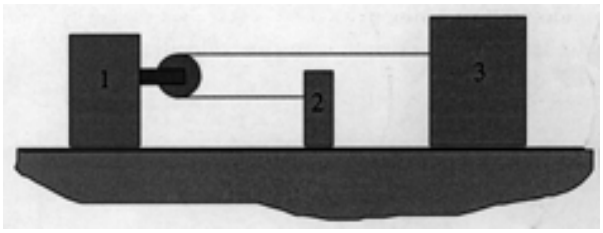
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

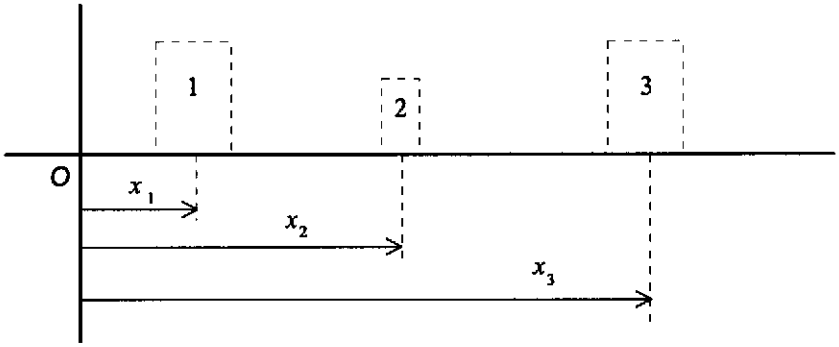
PROBLEMA 3.16

En la figura el bloque 1 se mueve hacia la izquierda con una velocidad de 1 m/s, la cual decrece a razón de 0,5 m/s^2 , y el bloque 2 se mueve hacia la derecha con una velocidad de 2 m/s, la cual decrece con una tasa de 0,2 m/s^2. Determinar la velocidad y la aceleración del bloque 3, y su velocidad y aceleración relativas respecto del bloque 2.



SOLUCIÓN

Consideremos un sistema de referencia tal como se ve en la figura adjunta.



La relación vincular entre las posiciones de los tres bloques se expresa mediante la siguiente ecuación

$$2\,(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) = \text{cte.}$$

de donde $$-2\,x_1 + x_2 + x_3 = \text{cte.}$$

Derivando respecto del tiempo se tiene la relación entre las velocidades $$-2\,v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

cuya derivada proporciona la relación entre las aceleraciones $$-2\,a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

de donde se tiene $v_3 = 4$ m/s hacia la izquierda, y $a_3 = 1{,}2$ m/s^2 hacia la derecha.

La velocidad relativa $v_{32} = v_3 - v_2 = 6$ m/s hacia la izquierda y la aceleración relativa $a_{32} = a_3 - a_2 = 1{,}4$ m/s^2 hacia la derecha.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

3.6 Movimiento plano en coordenadas rectangulares

El movimiento de las partículas cuyas trayectorias están contenidas en un plano constituye un apartado muy importante de la Cinemática debido al gran número de casos prácticos cuyo movimiento tiene lugar sobre una superficie plana. Para determinar las trayectorias de las partículas se utilizan, en general, debido a su gran sencillez para describir el movimiento, un sistema de coordenadas rectangulares. En el sistema de coordenadas rectangulares, las curvas coordenadas son dos familias de rectas perpendiculares entre sí, lo que hace que la base local sea la misma en todos los puntos del plano.

3.6.1 Componentes rectangulares de la aceleración

Para describir el movimiento plano tomaremos la referencia con el origen en un punto del plano del movimiento y dos de sus ejes, el eje X y el eje Y, contenidos en él, fig 3-21.

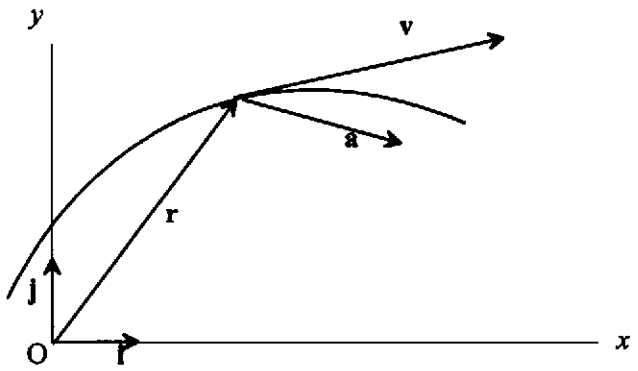


Fig. 3-21

Las expresiones de los vectores posición, velocidad y aceleración en componentes rectangulares son

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} \qquad \mathbf{v} = v_1\,\mathbf{i} + v_2\,\mathbf{j} \qquad \mathbf{a} = a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j}$$

El problema genérico del movimiento plano de una partícula consiste en: dadas las componentes de la aceleración y las condiciones iniciales, determinar la trayectoria de la partícula. La trayectoria es una curva plana que se obtiene eliminando el tiempo entre las

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

ecuaciones del movimiento. La determinación de las ecuaciones del movimiento $x(t)$ e $y(t)$ sigue un proceso equivalente al descrito en el movimiento rectilíneo cuando las componentes de la aceleración son, constantes, o función del tiempo, o la componente a_1 es función de x y la componente a_2 es función de y, o la componente a_1 es función de v_1 y la componente a_2 es función de v_2 .

En todos estos casos el movimiento plano se puede considerar como la superposición de dos movimientos rectilíneos independientes que tienen lugar a lo largo de el eje X y del eje Y respectivamente. Las ecuaciones diferenciales del movimiento

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_1 \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = a_2 \tag{3-28}$$

se pueden integrar de una manera independiente por los métodos descritos en la sección 3-4, dando como resultado las ecuaciones del movimiento $x(t)$ e $y(t)$, y, a partir de ellas, la trayectoria. Las componentes de la velocidad se obtienen integrando las componentes de la aceleración

$$v_1 = \int a_1\, dt + A \qquad v_2 = \int a_2\, dt + B \tag{3-29}$$

y las ecuaciones del movimiento de la integración de las componentes de la velocidad

$$x_1 = \int v_1\, dt + C \qquad x_2 = \int v_2\, dt + D \tag{3-30}$$

Las cuatro constantes de integración A, B, C, y D se determinan con las condiciones iniciales del movimiento. Cuando cada una de las componentes de la aceleración son funciones de x e y, el movimiento plano no se puede considerar como la superposición de dos movimientos rectilíneos independientes, y el cálculo de la trayectoria requiere, en cada caso concreto, la resolución del correspondiente sistema de ecuaciones diferenciales.

Cuando sobre un mismo plano se desplaza más de una partícula el estado cinemático del conjunto se denomina movimiento simultáneo de partículas. Las posiciones de las partículas pueden ser independientes o vinculadas. En el primer caso no existen relaciones entre las magnitudes cinemáticas de las partículas y, en el segundo, las velocidades y aceleraciones de las partículas satisfacen entre sí condiciones deducidas de los vínculos existentes entre las posiciones.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

3.6.2 Movimiento parabólico

El movimiento de los cuerpos en las proximidades de la superficie terrestre cuando, no se tiene en cuenta la resistencia del aire, los desplazamientos son muy pequeños comparados con el radio de la tierra y suponiendo que la tierra está fija en el espacio, son movimientos uniformemente acelerados, cuya aceleración es la de la gravedad $g = 9{,}8$ m/s^2. En una referencia con el eje X horizontal y el eje Y vertical, el vector aceleración está dado por la expresión es $\mathbf{a} = -g\,\mathbf{j}$.

Un cuerpo lanzado con velocidad inicial $\mathbf{v}_o$ paralela a la aceleración **a**, tiene un movimiento rectilíneo ascendente o descendente según que $\mathbf{v}_o$ esté dirigida hacia arriba o hacia abajo. Si la velocidad inicial $\mathbf{v}_o$ no sea paralela a la aceleración, su movimiento está contenido en un plano y la trayectoria es una parábola. Sea α el ángulo que forma la velocidad inicial $\mathbf{v}_o$ con la horizontal en el punto de lanzamiento en el cual tomaremos el origen de coordenadas, figura 3-22. Las componentes de la aceleración son constantes

$$a_1 = 0 \qquad a_2 = -g$$

luego el movimiento se puede descomponer en dos movimientos rectilíneos independientes según los ejes de coordenadas.

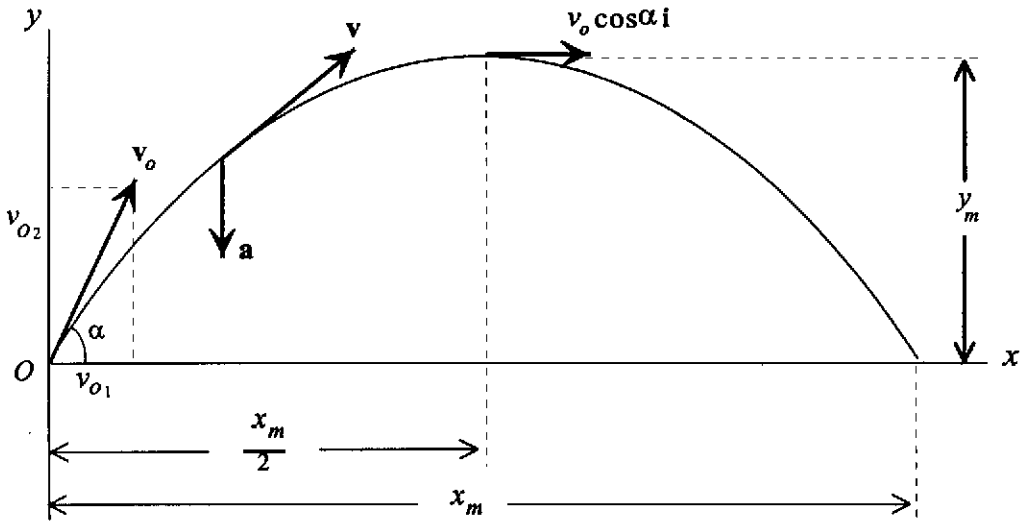


Fig. 3-22

El movimiento según el eje *x* es un movimiento uniforme y el movimiento según el eje *y*

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

es un movimiento uniformemente acelerado. En el instante inicial la partícula se encuentra en el origen de coordenadas y su velocidad es

$$\mathbf{v}_o = v_{o1}\,\mathbf{i} + v_{o2}\,\mathbf{j} = v_o \cos\alpha\ \mathbf{i} + v_o \operatorname{sen}\alpha\ \mathbf{j}$$

Las ecuaciones del movimiento se obtienen integrando las componentes de la aceleración

$$v_1 = \int a_1 dt + C_1 \qquad v_2 = \int a_2 dt + C_2$$

lo que proporciona las componentes de la velocidad

$$v_1 = v_o \cos\alpha \qquad v_2 = -g\,t + v_o \operatorname{sen}\alpha$$

Las constantes de integración se determinan con las condiciones iniciales. Integrando las componentes de la velocidad se obtienen las ecuaciones del movimiento

$$x = (v_o \cos\alpha)\,t \qquad y = (v_o \operatorname{sen}\alpha)\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2 \tag{3-31}$$

En el instante inicial, la partícula se encuentra en el origen de coordenadas, luego las constantes de integración correspondientes a las ecuaciones del movimiento son nulas. Eliminando el tiempo entre las ecuaciones (3-31) se obtiene la trayectoria.

$$y = (\tan\alpha)x - \left[\frac{g}{2v_o^2 \cos^2\alpha}\right] x^2 \tag{3-32}$$

La ecuación (3-32) es la de una parábola con la concavidad dirigida hacia los valores negativos del eje y, tal como se representa en la figura 3-22. Las coordenadas del vértice de la parábola se determinan de la condición $dy/dx = 0$, de donde se obtienen la longitud máxima alcanzada por el proyectil y la altura máxima de éste. Igualando a cero la derivada de y respecto de x, se obtiene el valor de x que hace que la y sea máxima; la parábola es una curva simétrica respecto de un eje vertical que pasa por su vértice, luego la distancia máxima es

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

dos veces el valor de la x correspondiente a la y_m. El alcance también se puede obtener directamente de la ecuación de la trayectoria como el valor de x para $y = 0$, y la altura máxima como la de un movimiento vertical con velocidad inicial v_o sen α. Operando queda para el alcance

$$x_m = \frac{v_o^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g} \tag{3-33}$$

y para la altura máxima

$$y_m = \frac{v_o^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g} \tag{3-34}$$

Fijando la velocidad inicial v_o, los valores de la distancia máxima x_m y de la altura máxima y_m dependen únicamente del ángulo α. Es obvio que el ángulo de tiro para el cual el alcance es máximo es $\alpha = 45°$ ya que para este ángulo el seno vale uno; la altura máxima absoluta corresponde a un lanzamiento vertical para el cual $\alpha = 90°$. Estos dos valores determinan la denomina *parábola de seguridad* para una velocidad v_o dada, definida como la parábola que pasa por los puntos correspondientes al alcance máximo y a la altura máxima absoluta, figura 3-23.

Para calcular la ecuación de la parábola de seguridad, hay que determinando los coeficientes de la expresión general de una parábola

$$y = m x^2 + n x + p$$

imponiendo las condiciones de que su vértice sea el punto $(0, v_o^2/2g)$ y que los puntos de corte con el eje x tengan de abcisas $\pm v_o^2/g$. Operando se obtiene

$$y = -\frac{2g}{v_o^2} x^2 + \frac{v_o^2}{2g} \tag{3-35}$$

Los puntos del plano situados mas allá de la parábola de seguridad no pueden ser alcanzados por un proyectil lanzado con una velocidad v_o.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

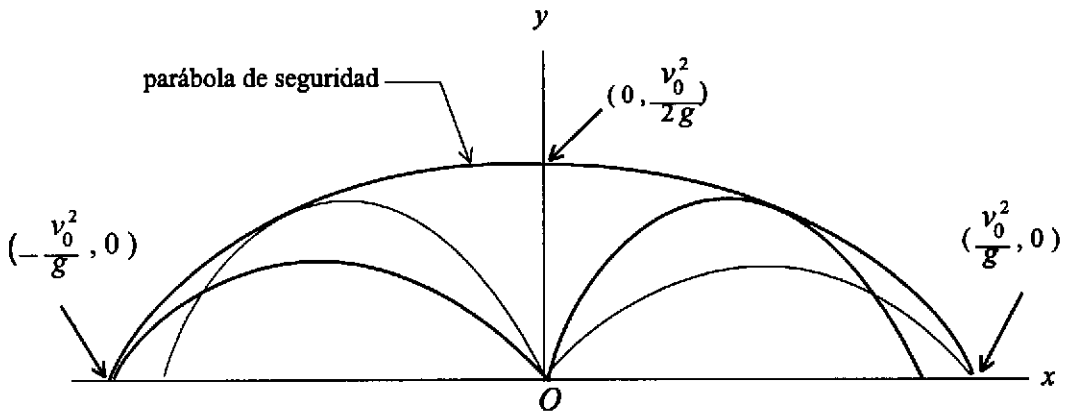


Fig.3-23

En los casos en que el movimiento parabólico no se inicia en el origen, sino que en el instante inicial $t = 0$, la partícula se encuentre en el punto de coordenadas (x_o, y_o) con una velocidad $\mathbf{v}_o$ tal que forme un ángulo α con la horizontal, las constante de integración de las ecuaciones del movimiento $x(t)$ e $y(t)$ son ahora iguales a x_o e y_o respectivamente, con lo que las ecuaciones (3-31) cambian a

$$x = x_o + (v_o \cos\alpha)\, t \qquad y = y_o + (v_o \operatorname{sen}\alpha)\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

y la ecuación de la trayectoria es

$$y = y_o + (\operatorname{tg}\alpha)(x - x_o) - \frac{g}{2 v_o^2 \cos^2\alpha} (x - x_o)^2$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 3-17

El vector posición de una partícula cuyo movimiento es plano varía en función del tiempo según la expresión $\mathbf{r} = 2t\,\mathbf{i} - 8t^2\,\mathbf{j}$ m. Determinar :
a) la ecuación de la trayectoria
b) la velocidad y la aceleración

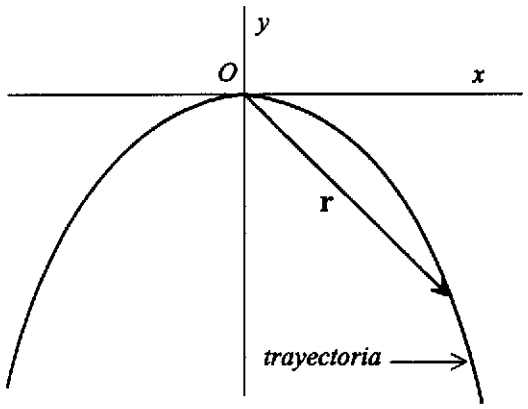
SOLUCIÓN

a) Las ecuaciones del movimiento son: $x = 2t$, $y = -8t^2$

Eliminando el tiempo entre ellas queda la ecuación de la trayectoria

$$y = -2x^2$$

que es una parábola con la concavidad dirigida hacia las y negativas.



b) La velocidad es la derivada de la posición respecto del tiempo.

Las componentes de la velocidad son:

$$v_1 = 2 \qquad v_2 = -16\,t$$

Las componentes de la aceleración son:

$$a_1 = 0 \qquad a_2 = -16$$

El modulo de la velocidad es

$$v = (4 - 256\,t^2)^{1/2}$$

El módulo de la aceleración es

$$a = 256\,t^2$$

La velocidad **v** y la aceleración **a** se obtienen derivando el vector posición respecto del tiempo

$$\mathbf{v} = 2\,\mathbf{i} - 16\,t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = -16\,\mathbf{j}$$

El movimiento a lo largo del eje x es uniforme y a lo largo del eje y es unifórmente acelerado.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 3-18

El vector posición de una partícula cuya trayectoria es plana es una función del tiempo dada por la ecuación $\mathbf{r} = (t - \text{sen}\, t)\,\mathbf{i} + (1 - \cos t)\,\mathbf{j}$. Determinar: a) la velocidad y aceleración de la partícula , b) la ecuación de la hodógrafa

SOLUCIÓN

a) La velocidad es la derivada de la posición $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, de donde

$$\mathbf{v} = (1 - \cos t)\,\mathbf{i} + \text{sen}\, t\,\mathbf{j} \qquad \text{y su módulo es} \qquad v = \sqrt{2\,(1 - \cos t)}\ \ \text{ms}^{-1}$$

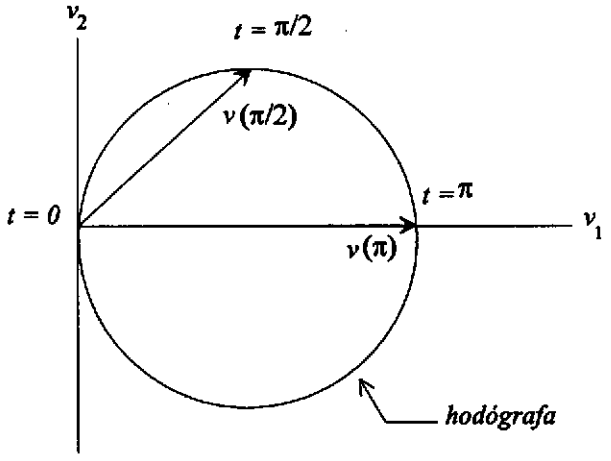
La aceleración es la derivada de la velocidad $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, de donde

$$\mathbf{a} = \text{sen}\, t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} \qquad \Rightarrow \qquad a = 1\ \text{ms}^{-1}$$

b) La hodógrafa es la curva descrita por el extremo del vector velocidad situado en el origen de coordenadas. Eliminando el tiempo entre las ecuaciones $v_1 = 1 - \cos t$ y $v_2 = \text{sen}\, t$, se obtiene

$$(v_1 - 1)^2 + v_2^2 = 1$$

En el sistema de ejes coordenadas v_1 , v_2 la ecuación anterior corresponde a una circunferencia de radio 1 y centro en (1, 0).



© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 3-19

La aceleración de una partícula cuyo movimiento es plano está dada por $\mathbf{a} = -k\,\mathbf{i} + k\,\mathbf{j}$ en donde k es una constante positiva.. En el instante inicial se encuentra en el origen de coordenadas con velocidad $\mathbf{v}(0) = v_0\,\mathbf{i}$. Determinar : a) la trayectoria , b) el valor de la velocidad mínima

SOLUCIÓN

a) Integrando $\frac{d^2x}{dt^2} = -k$ y $\frac{d^2y}{dt^2} = k$ se obtienen las ecuaciones del movimiento

$$x = -\frac{1}{2}kt^2 + C_1 t + C_2 \qquad y = \frac{1}{2}kt^2 + C_3 t + C_4$$

Con las condiciones iniciales $C_1 = v_o$ $C_2 = 0$ $C_3 = 0$ $C_4 = 0$

y las ecuaciones del movimiento son: $x(t) = v_o\, t - \frac{1}{2}k\,t^2$ $y(t) = \frac{1}{2}k\,t^2$

Eliminando el tiempo se obtiene la ecuación de la trayectoria, que es una parábola no centrada

$$(x + y)^2 = \left(\frac{2v_o}{k}\right) y$$

b) El vector velocidad es $\mathbf{v} = (v_o - k\,t)\mathbf{i} + k\,t\,\mathbf{j}$, siendo su módulo

$$v = \sqrt{(v_o - 2v_o\,kt + 2k^2t^2)}$$

Derivando e igualando a cero su derivada, $dv/dt = 0$, se tiene en qué instante de tiempo la velocidad pasa por un valor extremo (mínimo)

$$t = \frac{v_o}{2k}$$

que, sustituida en la expresión de la velocidad, da la velocidad mínima

$$v_{min} = \frac{\sqrt{2}}{2} v_o$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 3-20

Una partícula se mueve sobre un plano con una aceleración $\mathbf{a} = -9y\,\mathbf{j}$ m/s^2. En el instante inicial, el vector posición es $\mathbf{r}_o = 3\,\mathbf{j}$ m y su velocidad $\mathbf{v}_o = 3\,\mathbf{i}$ m/s. Determinar: a) la trayectoria, b) la hodógrafa, c) el tiempo transcurrido hasta que la trayectoria corta al eje X.

SOLUCIÓN

a) La aceleración sólo tiene componente **j**, luego

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dv_1}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -9y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dv_2}{dt} = -9y$$

Integrando queda para la primera

$$v_1 = C_1 \qquad \Rightarrow \qquad x = C_1 t + C_2$$

y para la segunda

$$v_2\, dv_2 = -9y\, dy \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}v_2^2 = -\frac{1}{2}9y^2 + C_3$$

De las condiciones iniciales se tiene

$$C_1 = 3 \qquad C_2 = 0 \qquad 2C_3 = 81$$

Sustituyendo queda

$$x = 3t \quad (1)$$

y la componente v_2 de la velocidad cuyo valor es

$$v_2^2 = 9(9 - y^2)$$

Transformando la expresión de la v_2 se tiene

$$v_2 = \frac{dy}{dt} = 3\sqrt{9 - y^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{\sqrt{9 - y^2}} = 3\,dt$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Integrando se tiene $y = 3 \text{ sen } (-3\, t + C_4)$. De las condiciones iniciales queda $C_4 = \pi/2$, y sustituyendo queda $y = 3 \cos (3\, t)$ (2) . Los valores de y oscilan entre 3 y –3, cambiando alternativamente el sentido de la aceleración. Eliminando el tiempo entre las ecuaciones (1) y (2) se obtiene la trayectoria

$$y = 3 \cos (x)$$

b) El vector velocidad es $\mathbf{v} = 3\,\mathbf{i} - 9 \text{ sen } (3\, t)\,\mathbf{j}$, luego su extremo está constantemente sobre una recta paralela al eje **j** trazada por el punto $v_1 = 3$. La componente v_2 de la velocidad tiene valores comprendidos entre – 9 y 9 m/s. La hodógrafa es un segmento rectilineo paralelo al eje **j** comprendido entre dichos valores.

c) El vector posición en función del tiempo es $\mathbf{r}\,(t) = 3\, t\,\mathbf{i} + 3 \cos (3t)\,\mathbf{j}$. En los instantes en que la trayectoria corte al eje X la componente **j** debe de ser nula, luego

$$3t = \frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2};\ \cdots\cdots \quad \Rightarrow \quad 3t = (2n + 1)\,\frac{\pi}{2} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

www.elsolucionario.net

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 3-21

La trayectoria de una partícual es la parábola $y^2 = 2x$. La ecuación de la hodógrafa coincide con la de la trayectoria. En el instante inicial se encuentra en el punto (1/2, 1). Determinar: a) las ecuaciones del movimiento, b) la velocidad y la aceleración

SOLUCIÓN

a) La hodógrafa es la curva descrita por el extremo del vector velocidad con origen en el origen de coordenadas . En este caso, el extremo del vector **v** está en cada instante sobre la parábola $y^2 = 2x$, luego las componentes de la velocidad satisfacen la misma ecuación que las componentes del vector posición.

$$v_2^2 = 2 v_1 \tag{1}$$

Derivando respecto del tiempo la ecuación de la trayectoria se tiene

$$y v_2 = v_1 \tag{2}$$

Sustituyendo (1) en (2) se tiene $v_2 = dy/dt = 2y$ $\qquad dy/y = 2\,dt$

Integrando queda $\qquad \ln y = \ln e^{2t} + A$

De las condiciones iniciales se tiene que la constante de integración $A = 0$. Las ecuaciones del movimiento son

$$x = 0.5\, e^{4t} \qquad y = e^{2t}$$

b) Derivando las ecuacíones del movimiento se obtienen las componentes de la velocidad y de la aceleración, cuyas expresiones vectoriales están dadas por

$$\mathbf{v} = 2e^{4t}\,\mathbf{i} + 2e^{2t}\,\mathbf{j}$$

y

$$\mathbf{a} = 8e^{4t}\,\mathbf{i} + 4e^{2t}\,\mathbf{j}$$

respectivamente.

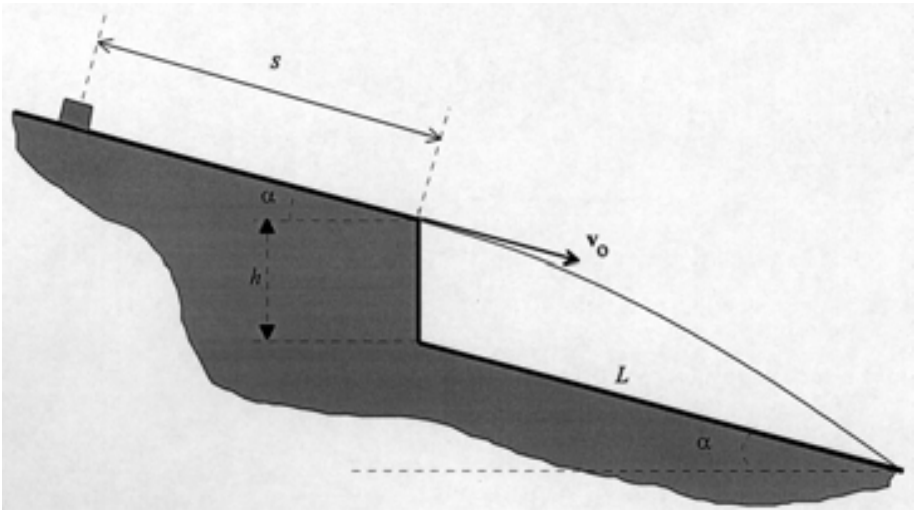
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 3-22

El bloque de la figura desliza sobre el plano inclinado partiendo del reposo recorriendo una distancia s hasta el borde del desnivel de altura h. Determinar la longitud L desde el pie del desnivel hasta el punto de choque .



SOLUCIÓN

El movimiento del bloque sobre el plano inclinado es un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. El valor de la aceleración es la componente de la aceleración de la gravedad **g** en la dirección del plano inclinado, cuyo valor es g sen α. De la ecuación que relaciona la velocidad con el desplazamiento y la aceleración se tiene que la velocidad del bloque después de recorrer la distancia s es

$$v_0 = \sqrt{2 s\, g\, sen\alpha} \qquad (1)$$

La aceleración del bloque a partir del desnivel es la de la gravedad **g**, luego su movimiento es parabólico. Para calcular la distancia L tomaremos como sistema de referencia el indicado en la figura adjunta.

Las condiciones iniciales son las que corresponden a la posición $(0, y_o)$, siendo $y_o = h + L\,\text{sen}\alpha$.

La velocidad inicial es $\mathbf{v}_o = v_o \cos\alpha\, \mathbf{i} - v_o \text{sen}\,\alpha\, \mathbf{j}$

Las ecuaciones del movimiento son :

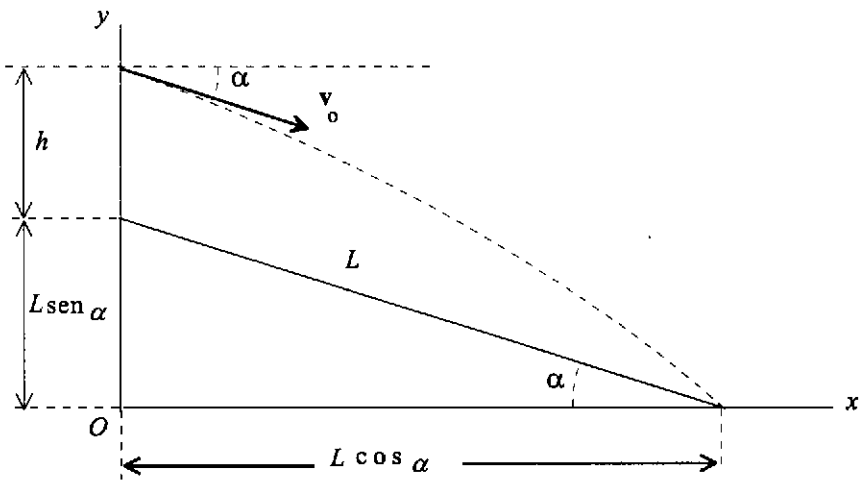
$$x = (v_o \cos\alpha)\, t$$

$$y = y_o - (v_o \text{sen}\,\alpha)\, t - g/2\, t^2$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



Eliminando el tiempo entre ellas se tiene la trayectoria

$$y = y_0 - (\text{tg}\,\alpha)\,x - \left(\frac{g}{2v_0^2\,\cos^2\alpha}\right)x$$

Las coordenadas del punto de impacto son $(L\,cos\,\alpha, 0)$. Sustituyendo valores queda

$$0 = h - \left(\frac{g}{2\,v_0^2}\right)L^2$$

Despejando h y teniendo en cuenta (1), el valor pedido es

$$L = 2\sqrt{s\,h\,\text{sen}\,\alpha}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

3.7 Movimiento plano en coordenadas polares

Para fijar la posición de un punto de un plano se ha utilizado hasta ahora las coordenadas rectangulares, con la gran ventaja de que la base **i, j** del sistema es invariante al pasar de un punto a otro del plano, pero que tiene el inconveniente de que su utilización sistemática para cualquier tipo de problema, presenta en algunos casos una gran dificultad matemática, que hace incluso imposible la obtención de solución del problema. Para estos casos, se hace necesaria la utilización de otros sistemas de coordenadas, como pueden ser el sistema de *coordenadas polares* que se describe a continuación.

3.7.1 Coordenadas polares

El elemento geométrico que permite fijar la posición de los puntos de un plano en coordenadas polares, es una semirecta de dicho plano denominada eje polar. El origen O de la semirecta es el origen de coordenadas. La posición de un punto P cualquiera del plano que contiene a la semirecta queda fijada por dos parámetros: la distancia r al origen O, y el ángulo θ entre la semirecta y el segmento que une el origen con el punto, contado positivo en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Un punto P del plano en coordenadas polares se representan por $P\ (r, \theta)$. Se puede superponer una referencia rectangular con la polar, tomando el origen común y haciendo coincidir el eje X con el semieje polar, figura 3-24.

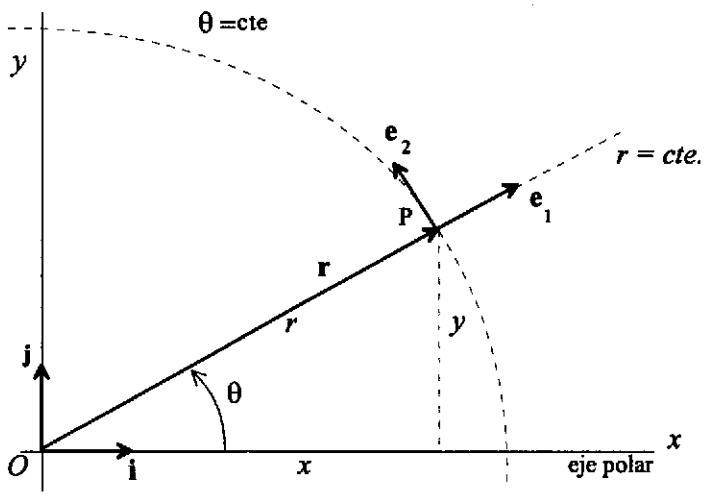


Fig. 3-24

Las curvas coordenadas que pasan por el punto P están dadas por r = cte y θ = cte, que son respectivamente, una circunferencia de radio r y centro en O y la semirecta OP. Los

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

vectores tangentes unitarios por P a dichas curvas coordenadas $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ forman la base ortonormal de la coordenadas polares, cuya orientación cambia con el valor del ángulo θ. Los vectores de la base se sitúan en el origen O de coordenadas. La relación entre las coordenadas rectangulares y polares del punto P está dada por

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta \tag{3-36}$$

de donde

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \theta = \text{arc tg}\,(y/x) \tag{3-37}$$

La expresión del vector posición $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ al sustituir x, y por su valor en polares, cambia a $\mathbf{r} = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}$. Los vectores unidad de la base polar se definen como el límite de los cocientes increméntales del vector $\mathbf{r}$ según r y según θ, cuyos valores están dados por

$$\mathbf{e}_1 = \frac{d\mathbf{r}_r}{dr_r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{d\mathbf{r}_\theta}{dr_\theta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial r_\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \tag{3-38}$$

Sustituyendo las derivadas de $\mathbf{r}$ se tienen las expresiones de los vectores de la base polar

$$\mathbf{e}_1 = \cos\theta\,\mathbf{i} + \text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} \tag{3-39}$$

$$\mathbf{e}_2 = -\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j} \tag{3-40}$$

La matriz del cambio de base es

$$(e_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{3-41}$$

3.7.2 Componentes polares de la velocidad y aceleración

El vector posición $\mathbf{r}$ de una partícula expresado en la base polar tiene únicamente componente radial, $\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_1$. La velocidad se obtiene derivando la posición respecto del tiempo, figura 3-25.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\mathbf{e}_1 + r\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} \tag{3-42}$$

En las coordenadas polares el símbolo de la derivación respecto del tiempo se sustituye por un punto encima de la función sobre la cual actual. La ecuación (3-42) cambia a

$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{e}_1 + r\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} \tag{3-43}$$

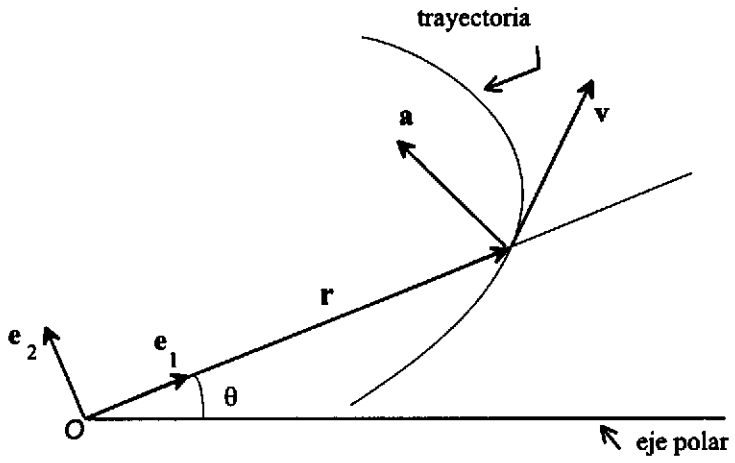


Fig. 3-25

Derivando las expresiones de los vectores de la base (3-39) y (3-40) respecto del tiempo queda

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{e}_2 = \dot{\theta}\,\mathbf{e}_2 \qquad \frac{d\mathbf{e}_2}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{e}_1 = -\dot{\theta}\,\mathbf{e}_1 \tag{3-44}$$

Sustituyendo la primera de las (3-44) en (3-43), se obtiene el vector velocidad en la base de las coordenadas polares

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{e}_1 + r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_2 = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta \qquad (3\text{-}45)$$

Derivando respecto del tiempo la velocidad y teniendo en cuenta las ecuaciones (3-44), se obtiene la expresión de la aceleración

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\mathbf{e}_1 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\mathbf{e}_2 = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_\theta \qquad (3\text{-}46)$$

A las componentes de los vectores velocidad y aceleración, dadas por las ecuaciones (3-45) y (3-46), en la base polar $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ se les denominan *componentes radiales y transversales* de la velocidad y aceleración respectivamente.

3.7.3 Velocidad y aceleración angular

Las derivadas respecto del tiempo de los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ están dadas por las ecuaciones (3-44), las cuales se pueden poner en forma de productos vectoriales de los vectores de la base. Se define el tercer vector $\mathbf{e}_3$ de la base polar como $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$, figura 3-26.

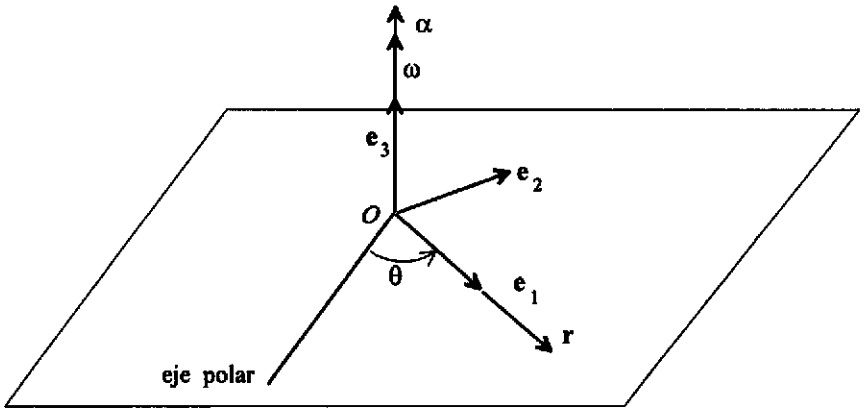


Fig. 3-26

Sustituidas las relaciones vectoriales $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1$ en las expresiones de las derivadas, y llamando ω al vector $\dot{\theta}\,\mathbf{e}_3$, las derivadas de los vectores de la base cambian a

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} = \boldsymbol{\varpi} \wedge \mathbf{e}_1 \qquad \frac{d\mathbf{e}_2}{dt} = \boldsymbol{\varpi} \wedge \mathbf{e}_2 \qquad (3\text{-}47)$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Midiendo el ángulo θ en radianes, el vector ω se mide en radianes por segundo (rad s^{-1}), se denomina *velocidad angular* y mide las tasa de cambio de orientación con el tiempo de la base polar, la cual queda definida para cada posición de la partícula por el vector **r**, luego ω representa la velocidad de rotación de **r** respecto del eje definido por $\mathbf{e}_3$ pasando por el origen O.

De la ecuación (3-45) se tiene que la velocidad transversal se expresa en función de la velocidad angular como $\mathbf{v}_\theta = \omega \wedge \mathbf{r}$. Derivando la velocidad angular ω respecto del tiempo, se tiene la aceleración angular α

$$\alpha = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \ddot{\theta}\,\mathbf{e}_3 \quad (\text{rad s}^{-2}) \tag{3-48}$$

3.7.4 Movimiento circular

Cuando la trayectoria de la partícula es una circunferencia, el vector posición $\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_1$ tiene módulo *r* constante, figura 3-27.

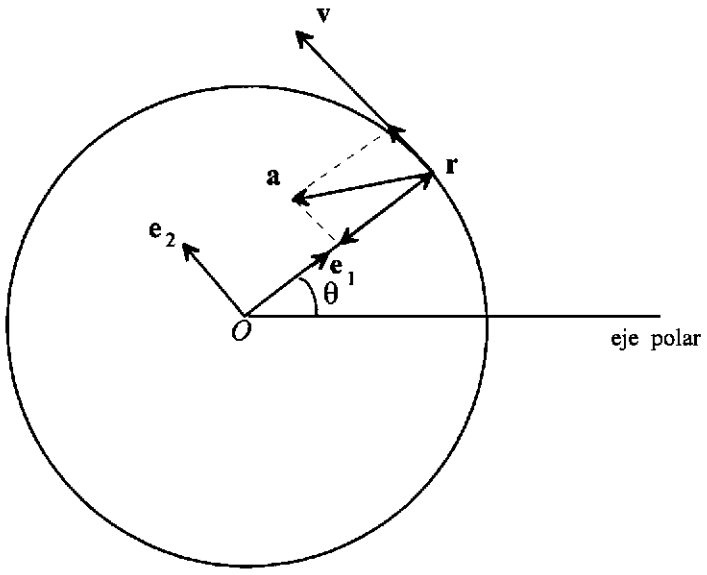


Fig. 3-27

Introduciendo en las ecuaciones (3-45) y (3-46) la condición *r* = cte, se obtienen las expresiones de la velocidad y de la aceleración para el movimiento circular dadas por

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$\mathbf{v} = r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_1 \qquad \mathbf{a} = -r\dot{\theta}^2\,\mathbf{e}_1 + r\ddot{\theta}\,\mathbf{e}_2 \tag{3-49}$$

Ambas expresiones se pueden escribir también en función de la velocidad y de la aceleración angular. En la base polar son

$$\mathbf{v} = r\varpi\,\mathbf{e}_2 \qquad \mathbf{a} = -r\varpi^2\,\mathbf{e}_1 + r\alpha\,\mathbf{e}_2 \tag{3-50}$$

o también, directamente, como productos vectoriales de ω y α por el vector posición $\mathbf{r}$

$$\mathbf{v} = \varpi \wedge \mathbf{r} \qquad \mathbf{a} = \varpi \wedge (\varpi \wedge \mathbf{r}) + \alpha \wedge \mathbf{r} \tag{3-51}$$

Se denomina periodo T al tiempo que tarda la partícula en recorrer la circunferencia. El recorrido elemental sobre la circunferencia es $ds = v\,dt$ que, integrado para una vuelta completa, da la ecuación que permite determinar el valor del periodo.

$$2\pi r = \int_0^T v\,dt \qquad \text{o} \qquad 2\pi = \int_0^T \varpi\,dt \tag{3-52}$$

Cuando el módulo de la velocidad $\mathbf{v}$ es constante, el movimiento se denomina *circular uniforme* para el cual el periodo es $T = 2\pi/\omega$.

3.8 Movimiento plano en función del arco

En los apartados anteriores se ha estudiado el movimiento plano de una partícula en coordenadas rectangulares y en coordenadas polares. Eliminando el tiempo entre las ecuaciones paramétricas del movimiento se obtenía la ecuación de la trayectoria, cuyas características geométricas son, obviamente, independientes del tiempo. Cuando la partícula se mueve sobre una trayectoria conocida, es posible expresar su aceleración en función de la *curvatura* de la curva,parámetro que determina la geometría de la curva en cada uno de sus puntos.

3.8.1 Curvatura de una curva plana

La geometría de una curva plana depende del arco elemental *ds,* definido como la distancia entre dos de sus puntos consecutivos sobre la curva infinitamente próximos. Los

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

extremos del arco definen la recta tangente a la curva en uno de sus puntos y el vector unitario τ, definido por $d\mathbf{s} = ds\,\tau$, figura 3-28 a), es su vector director.

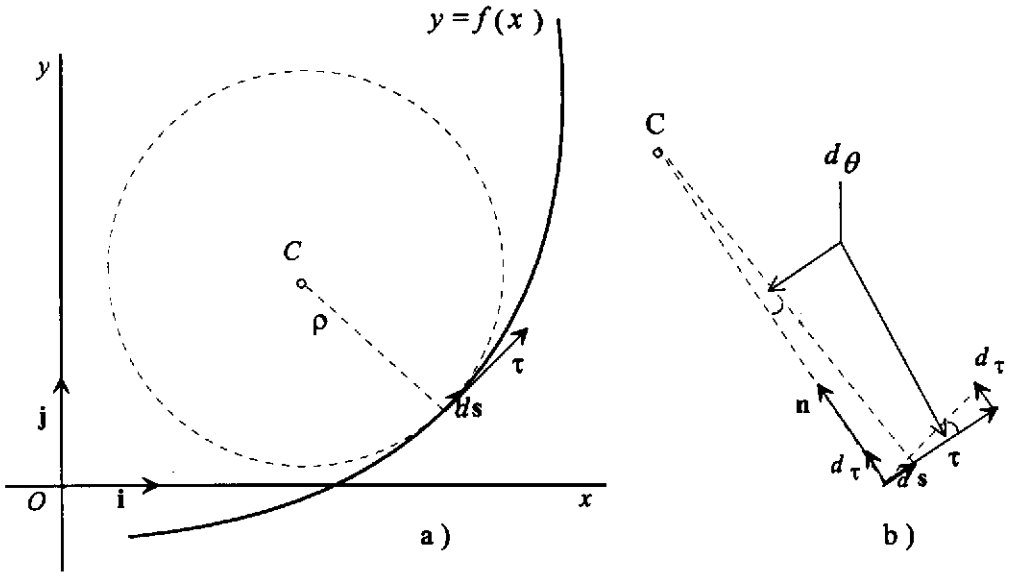


Fig. 3-28

Para cada punto de una curva plana, existe una circunferencia tangente a la curva en dicho punto, de centro C y radio ρ, tal que el elemento de arco ds de la curva pertenece también a la circunferencia, a la cual se denomina *circunferencia osculatriz*. Se define la *curvatura* de la curva en uno de sus puntos por el inverso del radio de la circunferencia tangente en el punto

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \tag{3-53}$$

El radio de curvatura y el centro de la circunferencia tangente en un punto de una curva dada, se determina con la condición de que en dicho punto coincidan los valores de ambas curvas así como sus primeras y segundas derivadas, problema que se resuelve en el apartado de contacto de curvas del análisis matemático.

Geométricamente, el valor de la curvatura en un punto está directamente relacionado con el incremento del vector τ al pasar de un extremo al otro del elemento de arco ds de la curva en dicho punto. En efecto, por ser τ un vector unitario, su incremento diferencial $d\tau$ es perpendicular a τ, figura 3-28 b). Los vectores τ y $\tau + d\tau$ son tangentes a la curva en los

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

extremos del arco ds, luego son perpendiculares a los correspondientes radios de la circunferencia tangente, lo que hace que el ángulo $d\theta$ sustentado por el arco ds sea igual al ángulo formado por los vectores τ y $\tau + d\tau$. Los módulos de τ y $\tau + d\tau$ son iguales a uno; identificando el arco con la cuerda se tiene $d\tau = d\theta$ y como $ds = \rho\, d\theta$ queda

$$d\tau = \frac{1}{\rho} ds \tag{3-54}$$

Tomando un vector unitario $\mathbf{n}$ en el punto de la curva y dirigido hacia el centro C, la ecuación (3-54) se puede escribir en forma vectorial como

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\rho} \mathbf{n} = \kappa \mathbf{n} \tag{3-55}$$

Los vectores τ y $\mathbf{n}$ forman una base ortonormal del espacio bidimensional que contiene a la curva plana, denominada *base intrínseca* de la curva.

3.8.2 Componentes intrínsecas de la aceleración

Una forma natural de describir el movimiento de una partícula cuya trayectoria sea una curva plana determinada, consiste en utilizar el recorrido s de la partícula sobre la trayectoria como parámetro para expresar su velocidad $\mathbf{v}$ y su aceleración $\mathbf{a}$. El elemento de arco en forma vectorial está dado por $d\mathbf{s} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j}$, de donde tomando módulos y operando queda

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx \tag{3-56}$$

ecuación que define el arco como parámetro. Teniendo en cuenta que $d\mathbf{s} = ds\,\tau$, se obtiene la expresión del vector tangente en componentes rectangulares

$$\tau = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} \tag{3-57}$$

Sea P_0 un punto de la trayectoria, figura 3-29, en el cual se encuentra la partícula en el instante inicial $t = 0$. En un instante posterior t la partícula estará situada en un punto P de la trayectoria a una distancia s del punto origen P_0, medida sobre la trayectoria. Tomaremos

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

como sentido positivo del recorrido s el que corresponde al crecimiento de s con el tiempo. Las coordenadas rectangulares del punto P, que coincide con la posición de la partícula en el instante t, son funciones del arco $x = x(s)$, $y = y(s)$.

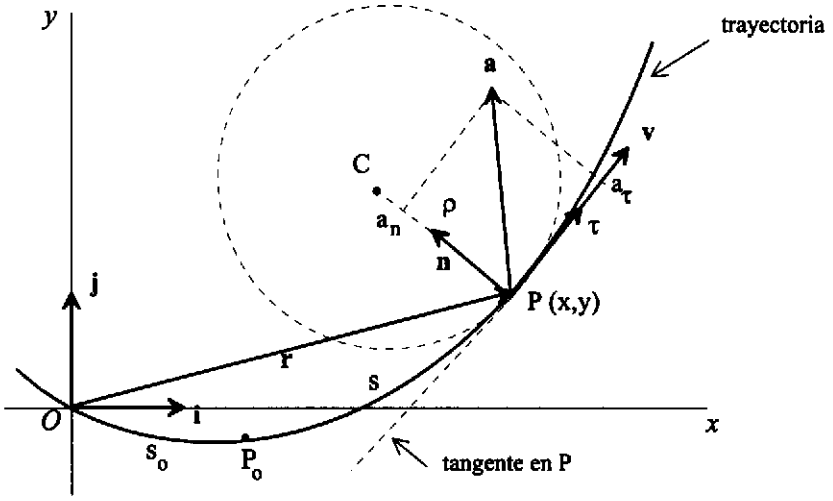


Fig. 3-29

El vector posición de la partícula en cada instante es el vector **r** definido por los puntos O y P, $\mathbf{r} = x(s)\,\mathbf{i} + y(s)\,\mathbf{j}$. La velocidad de la partícula en el punto P es la derivada de **r** respecto del tiempo; derivando se tiene

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\mathbf{r}}{ds} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{v} = v\,\tau \tag{3-58}$$

ya que según (3-57), la derivada de **r** respecto de s es el vector τ. La aceleración es la derivada de la velocidad respecto del tiempo; derivando la ecuación (3-58) queda

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\tau + v\frac{d\tau}{dt} = \frac{dv}{dt}\tau + v^2\frac{d\tau}{ds} \tag{3-59}$$

pero, teniendo en cuenta la ecuación (3-55), se obtiene finalmente

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\tau + \frac{v^2}{\rho}\,\mathbf{n} \tag{3–60}$$

Las componentes de la aceleración en la base intrínseca se denominan *aceleración tangencial* y *aceleración normal* respectivamente

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho} \tag{3-61}$$

o también, *componentes intrínseca* de la aceleración

$$\mathbf{a} = a_\tau \tau + a_n \mathbf{n} \tag{3-62}$$

De la ecuación (3-62) se pueden obtener los valores de la aceleración tangencial a_t y de la aceleración normal a_n en función de la velocidad **v** y de la aceleración **a** de la partícula. En efecto, multiplicando escalarmente la ecuación (3-62) por la velocidad **v** se tiene la aceleración tangencial a_t , y multiplicando vectorialmente por **v** la ecuación (3-62) y tomando módulos, se tiene la aceleración normal a_n . Mediante un sencillo cálculo se encuentra que sus expresiones están dadas por

$$a_\tau = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{v} \qquad a_n = \frac{|\mathbf{v}\wedge\mathbf{a}|}{v} \tag{3-63}$$

De las ecuaciones (3-61) se deduce que la curvatura está dada por

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{|\mathbf{v}\wedge\mathbf{a}|}{v^3} \tag{3-64}$$

Para trayectorias rectilíneas, la curvatura es $\kappa = 0$ y el radio de curvatura es $\rho = \infty$. Para trayectorias circulares, curvatura constante, el radio de curvatura es el radio de la circunferencia R y la aceleración normal es $a_n = v^2 / R$.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 3-23

Las coordenadas polares de una partícula cuyo movimiento es plano están dadas por las expresiones $r = 2\,r_o \operatorname{sen} \omega\, t$; $\theta = \omega\, t$, en donde r_o y ω son constantes positivas. Determinar :
a) la velocidad y aceleración de la partícula
b) su trayectoria
c) el periodo

SOLUCIÓN

a) Derivando respecto del tiempo las expresiones de **r** y θ se tiene

$$\dot{r} = 2 r_o\, \omega \cos \omega\, t \qquad \ddot{r} = -2 r_o\, \omega^2 \operatorname{sen} \omega\, t \qquad \dot{\theta} = \omega \qquad \ddot{\theta} = 0$$

de donde la velocidad y la aceleración están dadas por

$$\mathbf{v} = 2 r_o\, \omega\, (\cos \omega\, t\, \mathbf{e}_1 + \operatorname{sen}\ \omega\, t\, \mathbf{e}_2) \qquad \mathbf{a} = -4 r_o\, \omega^2 \operatorname{sen} \omega\, t\, \mathbf{e}_1 + 4 r_o\, \omega^2 \cos \omega\, t\, \mathbf{e}_2$$

y sus módulos son : $v = 2 r_0 \omega$ y $a = 4 r_0\, \omega^2$

b) Sustituyendo $\theta = \omega\, t$ en la expresión de r se tiene $r = 2 r_0 \operatorname{sen} \theta$, que es la ecuación de la trayectoria en polares. Pasando la curva a rectangulares se tiene

$$x = 2 r_0\ \operatorname{sen} \theta \cos \theta \qquad y = 2 r_0 \operatorname{sen}^2 \theta$$

Eliminando θ entre ambas ecuaciones se obtiene la expresión de la trayectoria en coordenadas rectangulares

$$x^2 + y^2 - 2 r_0 y = 0$$

que es la ecuación de una circunferencia de centro $C (0, r_0)$ y radio r_0 .

c) La partícula recorre la circunferencia con velocidad constante $v = 2 r_0 \omega$, luego el periodo T es

$$T = \pi / \omega$$

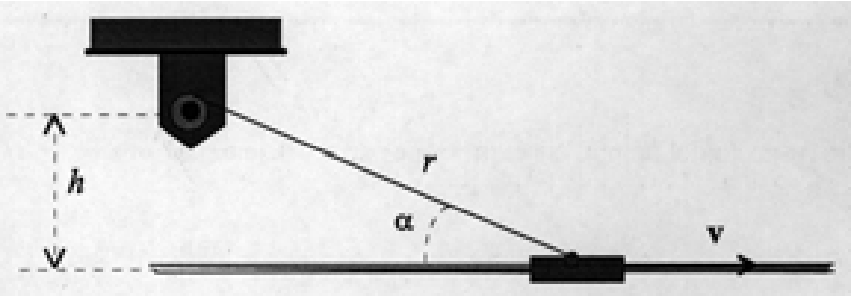
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

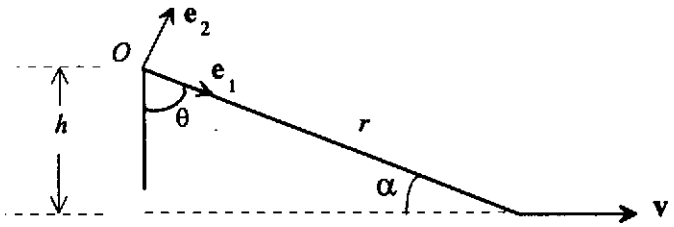
PROBLEMA 3-24

Una deslizadera se mueve sobre una guía horizontal con una velocidad constante v hacia la derecha, tal como se muestra en la figura adjunta. La deslizadera está unida a un cable enrollado sobre un carrete que se encuentra a una distancia h de la guia horizontal. Determinar la variación del ángulo α con el tiempo



SOLUCIÓN

Utilizando coordenadas polares con origen en un punto del eje del carrete, el vector posición r es



$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_1 = \frac{h}{\cos\theta}\mathbf{e}_1$$

La expresión genérica de la velocidad v en polares es $\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{e}_1 + r\,\dot{\theta}\,\mathbf{e}_2$

La velocidad de la deslizadera en la base polar está dada por $\mathbf{v} = v(\cos\alpha\,\mathbf{e}_1 + \operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{e}_2)$

Identificando los coeficientes de $\mathbf{e}_2$ en ambas ecuaciones, sustituyendo r por su valor, y despejando $\dot{\theta}$, se obtiene

$$\dot{\theta} = (v\operatorname{sen}^2\alpha)/h$$

Derivando respecto del tiempo la relación angular $\theta + \alpha = \pi/2$ queda $\dot{\theta} = -\dot{\alpha}$, que sustituida en la ecuación anterior, resulta

$$\dot{\alpha} = -\frac{v\ \operatorname{sen}^2\alpha}{h} = -\frac{v\,h}{r^2}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 3-25

Una párticula se mueve sobre un plano con velocidad v_0 constante siguiendo una trayectoria dada por $y = 3x^2$. Determinar:
a) el arco s en función del tiempo
b) las componentes rectangulares de la velocidad
c) las componentes rectangulares de la aceleración
d) la curvatura κ

SOLUCIÓN

a) La derivada del arco s respecto del tiempo es la velocidad v_0. Tomando el origen del arco en el origen de coordenadas, el arco s en función del tiempo es $s = v_0 t$

b) Las componentes de la velocidad son $v_1 = v_0 \cos\beta \qquad v_2 = v_0 \operatorname{sen}\beta$ (1)

De la figura se tiene que $tg\,\beta = y' = 6x$, por lo que se deduce fácilmente que

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + 36x^2}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{6x}{\sqrt{1 + 36x^2}}$$

que sustituidas en (1) dan las componentes rectangulares de la velocidad.

c) Las componentes de la velocidad cumplen la condición $v_2 = 6x\,v_1$. Derivando respecto del tiempo se tiene

$$a_2 = 6v_1^2 + 6x\,a_1 \tag{2}$$

La componente a_1 es la derivada respecto del tiempo de v_1. Haciendo la derivada de v_1 *se* tiene

$$a_1 = -v_0^2 \frac{36x}{\left(1 + 36x^2\right)^2} \tag{3}$$

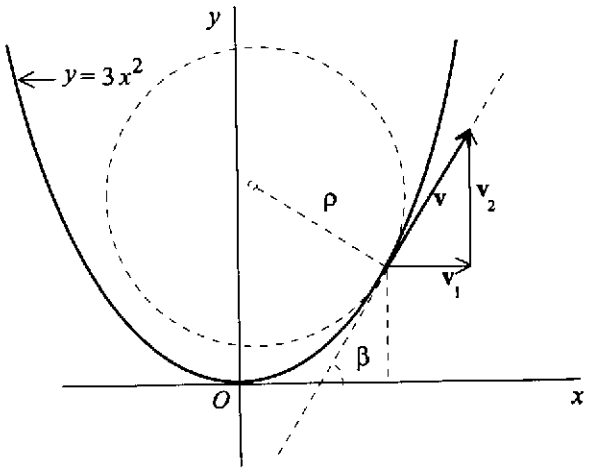
que, sustituida en (2), da la componente a_2 de la aceleración

$$a_2 = \frac{6v_0^2}{\left(1 + 36x^2\right)^2}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



d) La curvatura de la curva k es el inverso del radio de curvatura $k = \frac{1}{\rho} = \frac{|\mathbf{v} \wedge \mathbf{a}|}{v^3}$

Efectuando operaciones queda $$k = \frac{6}{\left(1 + 36x^2\right)^{3/2}}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 3-26

Una partícula recorre una trayectoria circular de radio R. Su velocidad v en función del arco s está dada por $v = 2\,k\,s^{1/2}$, en donde k es una constante positiva. Determinar:
a) las componentes intrínsecas de la aceleración
b) la posición en la cual la velocidad y la aceleración forman un ángulo de 45°
c) el tiempo t_o que tarda la partícula en dar la primera vuelta

SOLUCIÓN

a) La aceleración tangencial es la derivada de la velocidad respecto del tiempo

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\,\frac{ds}{dt} = v\,\frac{dv}{ds} = 4\,k^2$$

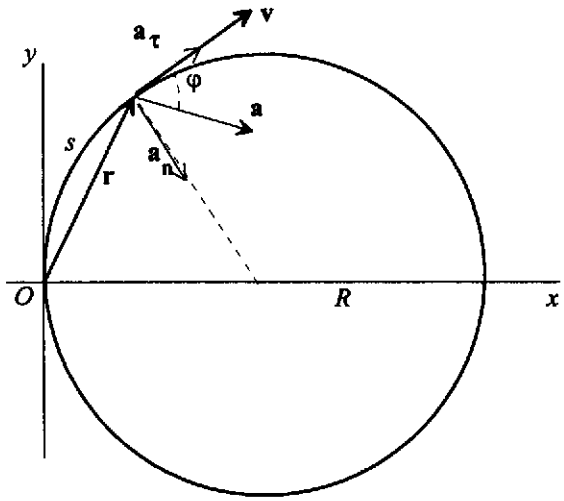
y la aceleración normal es

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{4\,k^2\,s}{R}$$

b) La velocidad y la aceleración forman un ángulo φ cuya tangente es igual al cociente entre la aceleración normal y la aceleración tangencial, siendo su valor

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{s}{R}$$

La tangente de 45° es igual a 1, luego la aceleración forma un ángulo de 45° con la velocidad cuando la partícula ha recorrido un arco cuya longitud sea igual al radio de la circunferencia.



© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

c) Calculemos la expresión del arco en función del tiempo; de $ds = v\,dt = 2\,k\,s^{1/2}\,dt$ se tiene

$$\frac{ds}{\sqrt{s}} = 2k\,dt \qquad \text{e integrando queda} \qquad s = k^2\,t^2$$

La velocidad en función del tiempo es $v = 2\,k^2\,t$. En el tiempo dt la partícula recorre el arco ds, luego $ds = 2\,k^2\,t\,dt$. Llamando T al tiempo que tarda en dar la primera vuelta, su valor se obtiene de la integral

$$\oint ds = 2k^2 \int_0^T t\,dt \qquad 2\pi R = k^2 T^2 \qquad T = \frac{\sqrt{2\pi R}}{k}$$

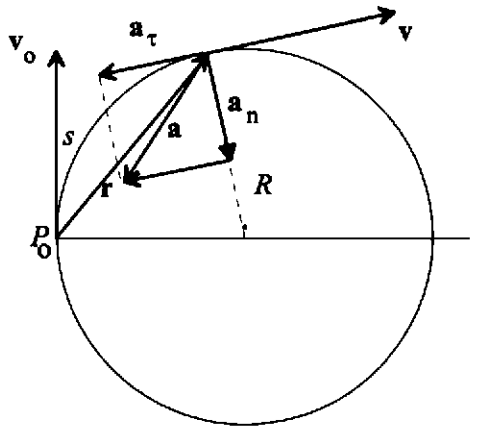
www.elsolucionario.net

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 3-27

Una partícula recorre una trayectoria circular de radio R partiendo del punto P_o con velocidad v_o. Su movimiento es retardado y las aceleraciones tangencial a_τ y normal a_n tienen el mismo valor. Determinar: a) su velocidad instantánea v, b) el valor de a_τ y a_n, c) el arco s en función del tiempo.



SOLUCIÓN

a) La trayectoria es una circunferencia de radio R. La curvatura es constante $\kappa = 1/R$, $\rho = R$.
El movimiento es retardado, luego de

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}\tau \quad \text{y} \quad a_n = \frac{v^2}{R}\mathbf{n} \qquad \text{se tiene que} \qquad -\frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{R}$$

Integrando se obtiene la velocidad de la partícula en función del tiempo

$$\frac{1}{v} = \frac{t}{R} + C$$

Para $t = 0$, $v = v_o$ sustituyendo en la expresión de la velocidad se tiene $C = 1/v_o$, de donde la velocidad está dada por

$$v = \frac{R\,v_o}{v_o\,t + R} \qquad \text{o en forma vectorial} \qquad \mathbf{v} = v\,\tau$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

b) La aceleración tangencial es $$a_\tau = \frac{dv}{dt} = -\frac{R v_o^2}{(v_o\, t + R)^2}$$

y la aceleración normal es $$a_n = -a_\tau = \frac{R v_o^2}{(v_o\, t + R)^2}$$

La aceleración instantánea es $$\mathbf{a} = a_\tau \boldsymbol{\tau} + a_n \mathbf{n}$$

y su módulo $$a = \frac{\sqrt{2}\, R\, v_o^2}{(v_o\, t + R)^2}$$

c) El recorrido s en función del tiempo se obtiene integrando $v = ds/dt$.

$$s = R \ln (v_o\, t + R) + C$$

Para $t = 0$, s = 0 , sustituyendo queda $C = -R \ln R$, de donde el recorrido en función del tiempo es

$$s = R \ln \left[1 + \left(\frac{v_o}{R} \right) t \right]$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

3.9 Movimiento en referencias móviles

En las secciones anteriores la referencia utilizada para describir el movimiento de una partícula en el espacio se ha considerado fija. Frecuentemente, es necesario determinar el movimiento de una partícula respecto de una referencia, la cual a su vez, está en movimiento respecto de otra. Al ser todas las referencias cinemáticamente equivalentes, consideraremos fija a una de ellas y móvil a la otra, según convenga.

En la sección 3.2 hemos visto que si Q es otro punto fijo del espacio, la velocidad y la aceleración de una partícula medidas desde O o desde Q, son las mismas. Consideremos ahora que el punto Q se mueve con una velocidad $\mathbf{v}_Q$ en la referencia de origen O, y consideremos Q como el origen de otra referencia, la cual está en movimiento respecto de O. La determinación de la velocidad y la aceleración del punto P en ambas referencias da valores distintos y, por tanto, también las trayectorias que describe el punto P en ambas referencias son diferentes.

Las relaciones existentes entre las velocidades y las aceleraciones dependen del movimiento de la referencia móvil respecto de la fija. Si la base de la referencia móvil mantienen fija su orientación, el movimiento de la referencia móvil es de *traslación*; cuando su orientación cambia con el tiempo, el movimiento se denomina de *rotación*, ya que como veremos, la tasa de cambio de orientación con el tiempo se puede expresar mediante una velocidad angular ω, tal como se ha hecho en los cambios de orientación de las bases de las coordenadas polares, cilíndricas y esféricas. Establecer las relaciones que existen entre las magnitudes cinemáticas del movimiento de la partícula en ambas referencias constituye el objetivo de la presente sección.

Estas relaciones se establecen en el marco de la Mecánica Clásica para la cual el espacio y el tiempo son absolutos, es decir, las medidas de la longitud de un segmento y la de un intervalo temporal entre dos sucesos dan el mismo resultado en todas las referencias, y son, por tanto, magnitudes que no están afectadas por la velocidad de la referencia en la cual se hace su determinación. Esto es válido para velocidades pequeñas comparadas con la de la luz, circunstancia que se da en la gran mayoría de las aplicaciones técnicas. Cuando la velocidad de la referencia tiene valores próximos a la velocidad de la luz el marco de la Mecánica Clásica ya no es aplicable y debe ser sustituido por el de la Mecánica Relativista en la cual el espacio y el tiempo no son magnitudes absolutas.

3.9.1 Referencias en traslación: transformación de Galileo

Sean O y Q los orígenes de las referencias fija y móvil respectivamente, figura 3-30, y consideremos que las orientaciones de los vectores base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ de la referencia de origen Q se mantienen fijas en el espacio mientras que el punto origen Q esta en movimiento respecto de la referencia de origen O. En cada instante, los vectores posición $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ del punto P en ambas referencias están relacionados por la ecuación vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}_Q + \mathbf{r}'$ donde $\mathbf{r}_Q$ es el vector posición del origen de la referencia móvil respecto de la fija. Las expresiones de

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

dichos vectores en las bases de las respectivas referencias son: $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}' = x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 + z'\mathbf{e}_3$. Derivando respecto del tiempo la ecuación que relaciona las posiciones, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{r}'$, se tiene la relación entre las velocidades en ambas referencias

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_Q + \mathbf{v}' \quad \text{donde } \mathbf{v}' \text{ es} \quad \mathbf{v}' = \frac{dx'}{dt}\,\mathbf{e}_1 + \frac{dy'}{dt}\,\mathbf{e}_2 + \frac{dz'}{dt}\,\mathbf{e}_3 \qquad (3\text{-}65)$$

La velocidad $\mathbf{v}$ de la partícula en la referencia fija es la suma de la velocidad de traslación instantánea del origen Q de la referencia móvil más la velocidad $\mathbf{v}'$ medida en la referencia móvil.

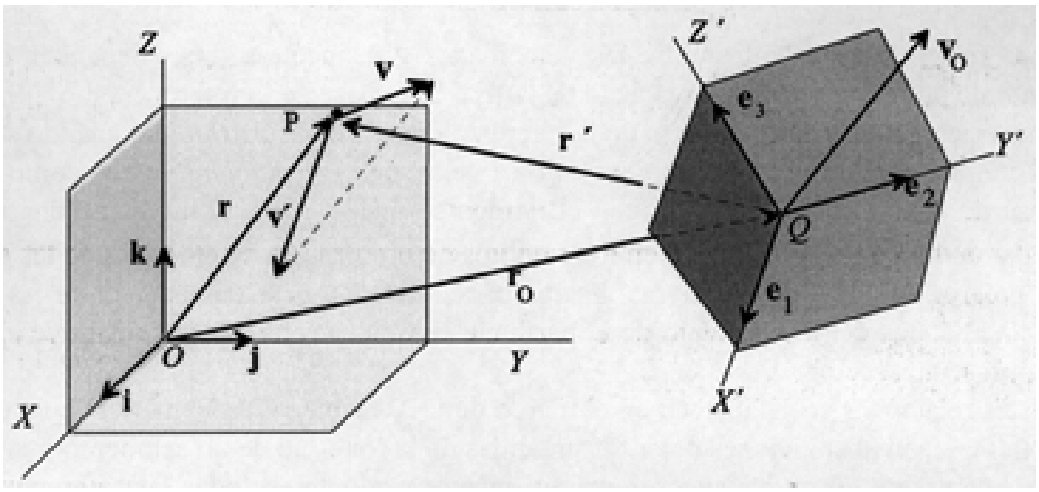


Fig. 3-30

Derivando la ecuación (3-65) respecto del tiempo se tiene la relación entre las aceleraciones en ambos sistemas.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_Q + \mathbf{a}' \qquad (3\text{-}66)$$

donde $\mathbf{a}'$ es la derivada de $\mathbf{v}'$ respecto del tiempo. Utilizando la matriz del cambio de base de ambas referencias, se obtienen las expresiones de $\mathbf{v}'$ y $\mathbf{a}'$ en la referencia de origen O. Cuando el movimiento del punto Q es uniforme la velocidad $\mathbf{v}_Q$ es constante y su aceleración $\mathbf{a}_Q$ es nula, en consecuencia, la aceleración del punto P es la misma en ambas referencias; y ya que todas las referencias son cinemáticamente equivalentes, se pude enunciar que *todas las referencias en movimiento uniformen miden la misma aceleración.* Este enunciado

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

constituye el principio de relatividad de Galileo. Consideremos el caso en que los ejes de la referencia móvil son paralelos a los de la referencia fija con lo cual, la base de ambas referencias es la misma. Si suponemos que los ejes X y X′ son coincidentes, que el punto Q se desplaza en el sentido positivo del eje X y que se empieza a contar el tiempo en el instante en que ambos orígenes coinciden, fácilmente se establece que las coordenadas del punto P en ambos referencias están relacionadas por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x' &= x - v_Q t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \qquad (3\text{-}67)$$

El conjunto de las cuatro ecuaciones (3-67) se denomina *transformación de Galileo*. La cuarta ecuación expresa el hecho de que el tiempo es una magnitud absoluta, es decir, que transcurre por igual en todas las referencias.

3.9.2 Referencias en rotación

Consideremos ahora que la velocidad del punto Q es cero, $\mathbf{v}_Q = 0$, es decir, el punto Q tienen una posición fija en la referencia O pero la base de la referencia asociada al punto Q cambia de orientación con el tiempo, $\mathbf{e}_1(t)$, $\mathbf{e}_2(t)$, $\mathbf{e}_3(t)$, figura 3-31.

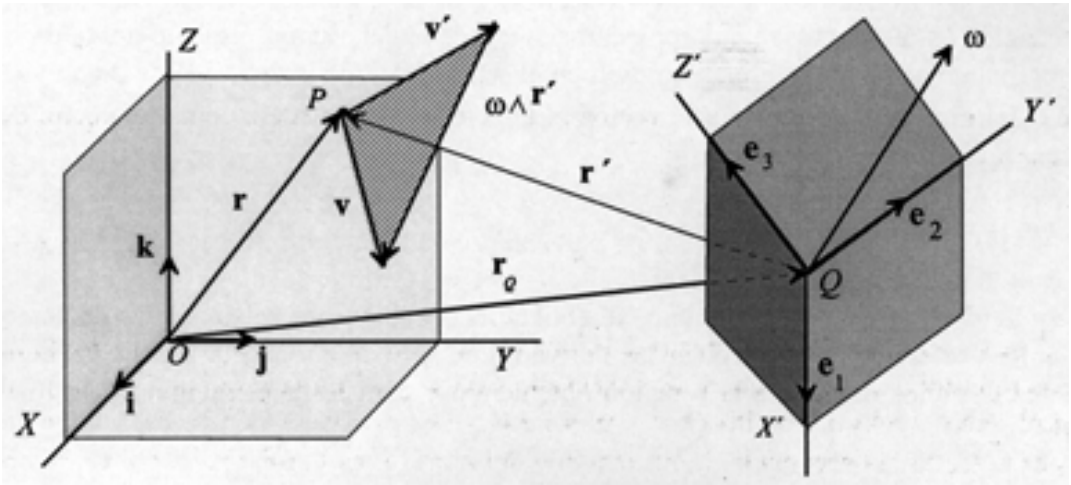


Fig. 3-31

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Las posiciones del punto P en ambas referencias están relacionadas por la ecuación vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}_Q + \mathbf{r}'$, en donde $\mathbf{r}'$ es el vector posición de P en la referencia Q. Al efectuar la derivada respecto del tiempo se ha de tener en cuenta que tanto las coordenadas posición del punto P en la referencia de origen Q (x', y', z') como los vectores de la base asociada a Q son funciones del tiempo. La derivada la ecuación $\mathbf{r} = \mathbf{r}_Q + \mathbf{r}'$ respecto del tiempo queda

$$\mathbf{v} = \left(\frac{dx'}{dt} \mathbf{e}_1 + \frac{dy'}{dt} \mathbf{e}_2 + \frac{dz'}{dt} \mathbf{e}_3 \right) + \left(x' \frac{d\mathbf{e}_1}{dt} + y' \frac{d\mathbf{e}_2}{dt} + z' \frac{d\mathbf{e}_3}{dt} \right) \qquad (3\text{-}68)$$

El primer paréntesis del segundo término de la ecuación (3-68) es la velocidad $\mathbf{v}'$ de la partícula en la referencia de origen Q; se demuestra que el segundo paréntesis es

$$x' \frac{d\mathbf{e}_1}{dt} + y' \frac{d\mathbf{e}_2}{dt} + z' \frac{d\mathbf{e}_3}{dt} = \boldsymbol{\varpi} \wedge \mathbf{r}' \qquad (3\text{-}69)$$

donde ω es un vector libre que mide la tasa de cambio de orientación con el tiempo de la base de la referencia de origen Q con respecto a la referencia fija, al cual se le denomina *velocidad angular de rotación*. Sustituyendo (3-69) en la ecuación (3-68) se obtiene que, la relación entre las velocidades de la partícula en referencias en rotación con origen fijo es

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}' \qquad (3\text{-}70)$$

La ecuación (3-69) expresa una propiedad general de la derivación respecto del tiempo de un vector cualquiera de la referencia móvil, en el sentido de que la derivada de dicho vector incluye el término aditivo $\omega \wedge$ (por el vector). El vector ω se considera como un vector de la referencia fija.

3.9.3 Aceleración de Coriolis

Derivando (3-70) respecto del tiempo, se obtiene la ecuación que relaciona las aceleraciones en ambas referencias. Al efectuar las derivadas de $\mathbf{v}'$ y de $\mathbf{r}'$ hay que añadir los correspondientes términos debidos a la rotación obteniéndose para las aceleraciones la siguiente ecuación

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\alpha} \wedge \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}') + 2\,\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}' \qquad (3\text{-}71)$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

donde α es la derivada de ω respecto del tiempo, denominada *aceleración angular*. El último sumando del segundo término de la ecuación (3-71) es un término complementario de aceleración, debido a la rotación de la referencia móvil respecto de la fija, que se denomina *aceleración de Coriolis*, la cual está presente siempre que la velocidad $\mathbf{v}'$ de la partícula no sea, ni nula ni paralela a la velocidad angular de rotación ω.

3.9.4 Movimiento general

Cuando la referencia móvil, además del movimiento de rotación respecto de la referencia fija, su origen Q tiene una velocidad $\mathbf{v}_Q$ respecto de O, el movimiento de la referencia móvil es a la vez de traslación y rotación. En los segundos términos de las ecuaciones (3-69) y (3-70) hay que añadir la velocidad $\mathbf{v}_Q$ y la aceleración $\mathbf{a}_Q$ respectivamente. Si $\mathbf{v}'$ es la velocidad en la referencia móvil, la expresión general para la velocidad $\mathbf{v}$ de una partícula en una referencia fija está dada por

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + (\mathbf{v}_Q + \omega \wedge \mathbf{r}') \tag{3-72}$$

donde el paréntesis es el término de velocidad que se añade debido al movimiento de la referencia móvil respecto de la fija que se denominada *velocidad de arrastre* $\mathbf{v}_{ar}$. De una manera análoga, para la aceleración se tiene

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + [\mathbf{a}_Q + \alpha \wedge \mathbf{r}' + \varpi \wedge (\varpi \wedge \mathbf{r}')] + 2\,\omega \wedge \mathbf{v}' \tag{3-73}$$

La velocidad $\mathbf{v}$ y la aceleración $\mathbf{a}$ de la partícula en la referencia fija se denominan *velocidad y aceleración absolutas,* y la velocidad $\mathbf{v}'$ y la aceleración $\mathbf{a}'$ de la partícula en la referencia móvil se denominan *velocidad y aceleración relativas*. Los tres sumandos entre paréntesis son el término de aceleración debido al movimiento de la referencia móvil respecto de la fija que se denominada *aceleración de arrastre* $\mathbf{a}_{ar}$, y el término de aceleración de Coriolis se le designa como $\mathbf{a}_C$. Con esta nomenclatura las ecuaciones (3-72) y (3-73) se escriben, para la velocidad

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_{ar} \tag{3-74}$$

y para la aceleración

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_{ar} + \mathbf{a}_C \tag{3-75}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Si la partícula se encuentra en reposo en la referencia móvil su velocidad y aceleración relativas son nulas, $\mathbf{v}_r = \mathbf{a}_r = 0$, y la aceleración absoluta es únicamente el término correspondiente a la aceleración de arrastre

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_Q + \alpha \wedge \mathbf{r}' + \omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{r}') \tag{3-76}$$

3.9.5 Movimiento de la partícula en la superficie terrestre

A efectos prácticos, la Tierra es una esfera de radio $R = 6370$ km, que es el valor medio del radio terrestre. De los diferentes movimientos de la tierra, el que tiene una influencia notable sobre los cuerpos que se desplazan en su superficie, es el *movimiento de rotación*. La tierra gira alrededor de un eje que pasa por su centro en la dirección norte-sur, siendo el sentido de movimiento hacia el este. Prescindiendo de su movimiento alrededor del sol, la Tierra se puede considerar como un cuerpo en rotación fijo en el espacio. La velocidad angular ω, es un vector situado sobre el eje de rotación de la tierra dirigido hacia el norte, cuyo módulo ω es aproximadamente igual a $\omega = 2\pi / 86400$ rad s^{-1}, siendo 86400 segundos la duración del día oficial. Así pues, una referencia asociada a elementos de la superficie terrestre, estará animada de una movimiento de rotación uniforme respecto de una referencia fija en el espacio.

El designar como fija o móvil una u otra de las referencias asociadas a los sistemas de coordenadas rectangulares con origen en los puntos O y Q es arbitrario. Ahora, tomaremos el origen Q del sistema de coordenadas fijo en el centro de la tierra con el vector $\mathbf{e}_3$ de la base sobre el eje de rotación de la tierra y los vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ en el plano ecuatorial. En un punto de la superficie terrestre de latitud λ, tomaremos el origen O del sistema de coordenadas móvil con la base $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ orientada, con el eje x en el sentido del *paralelo* del lugar, el eje y en el sentido del *meridiano* del lugar y el eje z en sentido *radial* tal como se muestra en la figura 3-32. Ahora las magnitudes cinemáticas de interés son las referidas a la superficie terrestre, luego para simplificar la escritura se asigna la notación prima a las magnitudes absolutas y sin prima a las relativas.

Consideremos el movimiento de un partícula cuando esta se desplaza con una velocidad $\mathbf{v}$ respecto de la superficie terrestre. La aceleración absoluta de la partícula situada en un entorno próximo a la superficie terrestre es la de la gravedad $\mathbf{g}$, donde $\mathbf{g}$ un vector dirigido hacia el centro de la tierra cuyo módulo g es aproximadamente igual a 9,8 ms^{-2}.

El origen O de la referencia móvil tiene un movimiento circular uniforme de velocidad absoluta $\mathbf{v}_o' = \omega \wedge \mathbf{R}$ y una aceleración absoluta $\mathbf{a}'_o = \omega \wedge (\omega \wedge R) = \omega^2 R \cos\lambda\, \mathbf{n}$. De la ecuación (3-73) se tiene que la aceleración de la partícula en la referencia de origen O está dada por

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} - \mathbf{a}'_o - \omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{r}) - 2\omega \wedge \mathbf{v} \tag{3-77}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

El término de aceleración $-\mathbf{a}'_o$, se denomina *aceleración centrífuga* ya que está dirigida perpendicularmente al eje de rotación de la Tierra y sentido hacia afuera

$$\mathbf{a}_{ce} = -\omega^2 R \cos\lambda \ \mathbf{n} \tag{3-78}$$

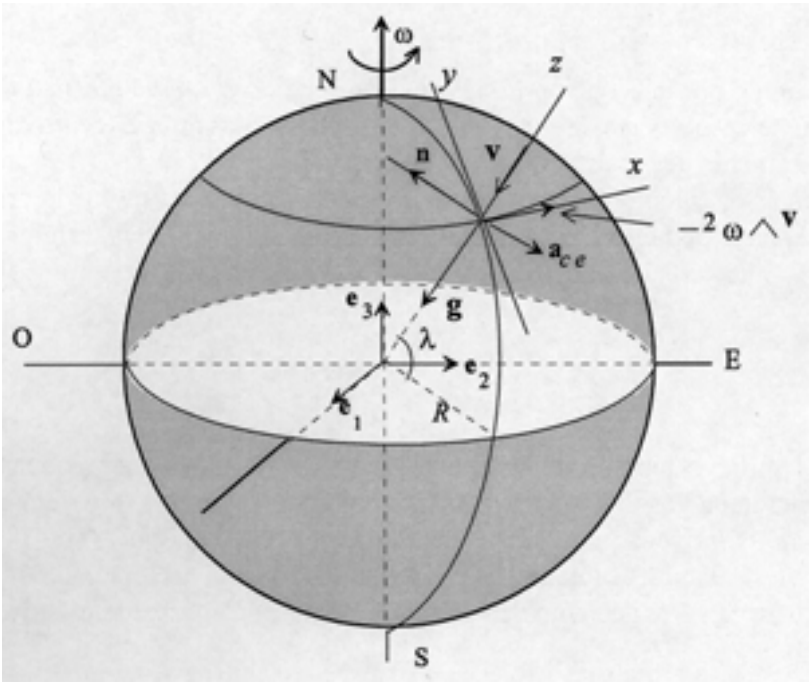


Fig. 3-32

donde **n** es el vector normal unitario dirigido hacia el centro de la circunferencia que describe el punto *O*. El movimiento de la partícula tiene lugar en un entorno próximo a la superficie terrestre y el vector posición de la partícula **r** es tal que su módulos mucho menor que el radio terrestre R ($r << R$), luego el término de aceleración $-\omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{r})$, cuya magnitud es proporcional a $\omega^2 r$, en cualquier caso es despreciable frente a la aceleración de centrífuga $\varpi^2 R \cos\lambda$. Prescindiendo de este término de aceleración, la ecuación (3-77) queda

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} + \mathbf{a}_{ce} - 2\ \omega \wedge \mathbf{v} \tag{3-79}$$

La aceleración absoluta **g** de la partícula en componentes es $\mathbf{g} = -g\,\mathbf{k}$ y la aceleración centrífuga expresada en componentes **i**, **j**, **k** está dada por

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$\mathbf{a}_{ce} = -\mathbf{a}'_o = -\varpi^2 R \cos\lambda\,(\operatorname{sen}\lambda\ \mathbf{j} - \cos\lambda\ \mathbf{k} \tag{3-80}$$

La suma de los dos primeros términos de la ecuación (3-79) en componentes es

$$\mathbf{g} + \mathbf{a}_{ce} = -\varpi^2 R \cos\lambda \operatorname{sen}\lambda\ \mathbf{j} - (g - \varpi^2 R \cos^2\lambda)\ \mathbf{k} \tag{3-81}$$

El vector definido por la ecuación (3-81) se denomina *aceleración efectiva de la gravedad* en la superficie terrestre $\mathbf{g}_{ef} = \mathbf{g} + \mathbf{a}_{ce}$, cuya dirección no pasa por el centro de la Tierra, es decir, está ligeramente desviada respecto de la dirección radial.

Para simplificar el cálculo de la trayectorias de las partículas, se puede prescindir en la ecuación (3-81) de la pequeña componente **j** de la aceleración efectiva dirigida hacia el sur, quedando para la aceleración efectiva

$$\mathbf{g}_{ef} = -(g - \omega^2 R \cos^2\lambda)\ \mathbf{k} \tag{3-82}$$

Su magnitud varía en función de la latitud, pero su valor medio es prácticamente igual al valor de la aceleración absoluta, por lo que para la gran mayoría de problemas de mecánica la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre está dada por $\mathbf{g} = -g\,\mathbf{k}$. En conclusión, con todas estas simplificaciones, la ecuación (3-79) de la aceleración de la partícula en la referencia de origen *O* vinculada a un punto de la superficie terrestre está dada por

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} - 2\,\omega \wedge \mathbf{v} \tag{3-83}$$

Para el caso en que la velocidad **v** de la partícula sea la correspondiente a la caída libre de un cuerpo, $\mathbf{v} = -v\,\mathbf{k}$, la componente de aceleración de Coriolis está dirigida hacia el este, siendo $-2\,\omega \wedge \mathbf{v} = 2\,\omega\, v \cos\lambda\,\mathbf{i}$. Debido a está aceleración, el movimiento del cuerpo no es exactamente vertical sino que describe una curva contenida en el plano *x-z* (ver problema 3-31) en el cual se determina la desviación producida por dicha aceleración.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 3-28

Desde un tren que se mueve sobre una vía recta y horizontal a 72 km/h se lanza un objeto en dirección perpendicular a la vía y paralelo al suelo con una velocidad de $v_o = 15$ m/s. Determinar:

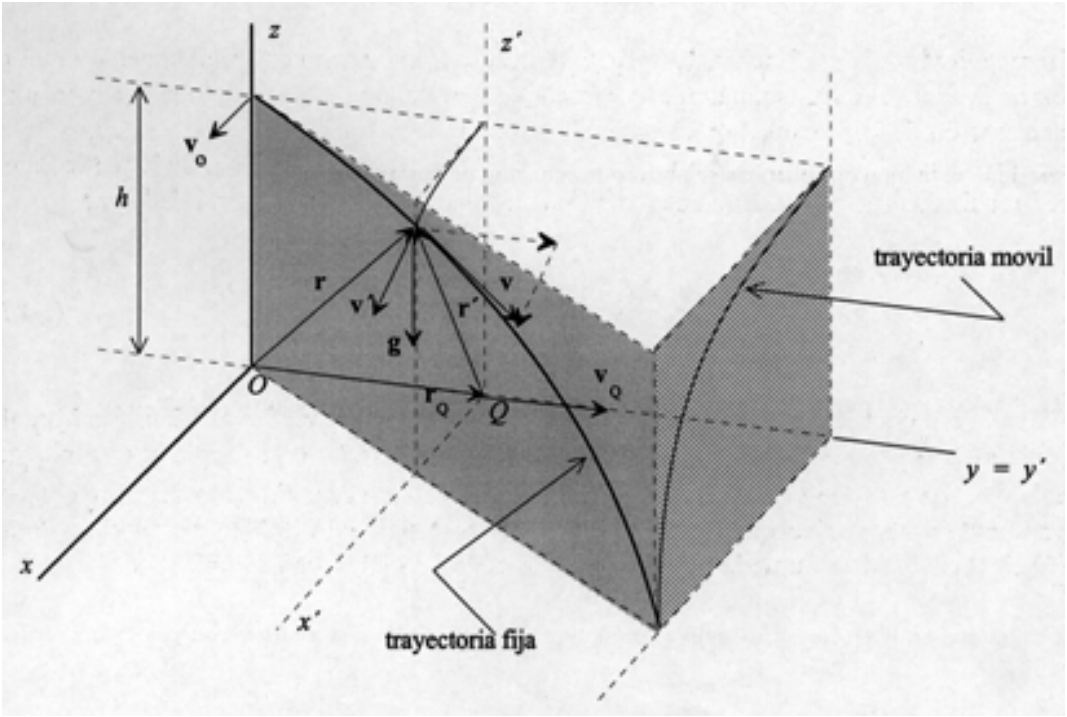
a) su trayectoria vista desde el tren y vista desde el suelo

b) el punto de impacto con el suelo si se ha lanzado desde una altura de 4 m. No tener en cuenta la resistencia del aire.

SOLUCIÓN

a) Para determinar la trayectoria respecto de tierra tomaremos una referencia tal como la indicada en la figura adjunta, es decir, con uno de sus ejes coincidente con la dirección de la velocidad del tren. Los ejes de la referencia móvil asociada al tren se toman paralelos a los de la referencia fija. Los orígenes de ambas referencias se hacen coincidir en el instante $t = 0$.

La referencia móvil (el tren), tiene un movimiento uniforme respecto de la fija, luego ambas referencias miden la misma aceleración que es la de la gravedad **g**. El movimiento del cuerpo respecto del tren es un movimiento parabólico contenido en el plano x'- z'. Las coordenadas del punto según el eje X y el eje Z coinciden en ambos sistemas $x = x'$, $z = z'$.



Bajo la acción de la gravedad $(-g\,\mathbf{k})$ el cuerpo adquiere una componente de velocidad según el eje

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

z' cuyo valor en función de la posición es

$$v_3 = -\sqrt{2g(h-z)}$$

La velocidad en la referencia móvil $\mathbf{v}'$es la velocidad relativa

$$\mathbf{v}_r = v_o\,\mathbf{i} - \sqrt{2g(h-z)}\,\mathbf{k}$$

Las componentes de la velocidad son las derivadas respecto del tiempo de las componentes del vector posición $\mathbf{r}'$. Identificando queda

$$\frac{dx}{dt} = v_o \qquad \frac{dz}{dt} = -\sqrt{2g(h-z)}$$

Integrando se tiene las ecuaciones de la trayectoria

$$x = v_o\,t \qquad z = h - \frac{1}{2}g\,t^2$$

Eliminando el tiempo entre ambas se obtiene la ecuación de la trayectoria

$$z = h - \left(\frac{1}{2}\frac{g}{v_o^2}\right) x^2$$

La coordenada x del punto de impacto sobre el suelo se obtiene de la trayectoria haciendo $z = 0$

$$x = v_o\sqrt{\frac{2h}{g}} = 13{,}55\ \text{m}$$

El tiempo que tarda en llegar al suelo es el tiempo de caída desde una altura h con velocidad vertical nula

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}90\ \text{s}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Trayectoria en la referencia fija

La velocidad en la referencia fija **v** es la suma de la velocidad del tren $\mathbf{v}_Q$, velocidad de arrastre, más la velocidad relativa $\mathbf{v} = \mathbf{v}_Q + \mathbf{v}_r$. Integrando las componentes de la velocidad absoluta se tiene las ecuaciones del movimiento

$$x = v_o\, t \qquad y = v_Q\, t \qquad z = h - \frac{1}{2} g\, t^2$$

y eliminando el tiempo entre ellas, la trayectoria, curva definida por la intersección del paraboloide

$$z = h - \left(\frac{1}{2}\frac{g}{v^2}\right) x^2$$

con el plano $v_Q\, x - v_o\, y = 0$

La coordenada y del punto de impacto es

$$y = v_Q\, t = v_Q \sqrt{\frac{2h}{g}} = 18{,}07 \text{ m}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 3-29

Durante una tormenta, la trayectoria de las gotas de agua observadas desde la ventana de una tren cuya velocidad es de 15 km/h, forman an ángulo de 30° con la vertical. Cuando la velocidad del tren ha aumentado hasta 30 km/h el ángulo de las gotas con la vertical es de 45°. Si el tren se parase ¿ cual sería el ángulo de la trayectoria de las gotas de agua respecto del suelo ? Determinar la velocidad con que caen las gotas de agua.

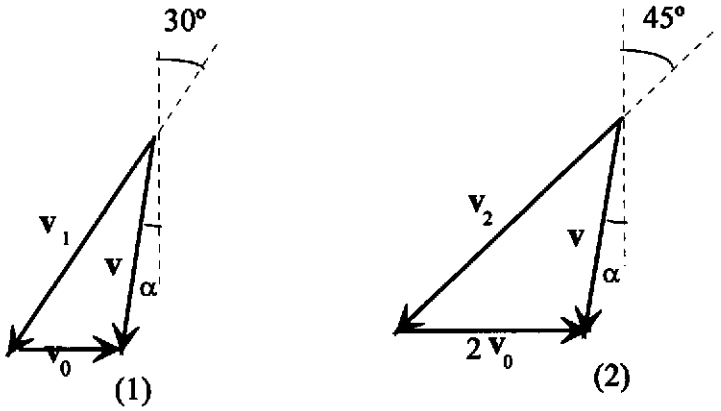
SOLUCIÓN

Sea $\mathbf{v}$ la velocidad de la lluvia respecto del suelo, que es su velocidad absoluta. La referencia ligada al tren es la móvil, que en el primer caso tiene una velocidad de traslación $\mathbf{v}_o = 15$ km/h y en el segundo caso, una velocidad de traslación de 30 km/h, es decir que $2\,\mathbf{v}_o$. Estas son las velocidades del origen de la referencia móvil respecto de la fija. De la ecuación (3-63) se tiene

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_o + \mathbf{v}_1 \qquad (1)$$

$$\mathbf{v} = 2\,\mathbf{v}_o + \mathbf{v}_2 \qquad (2)$$

donde $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son las velocidades relativas en cada uno de los casos. Sea α ángulo que forma la velocidad $\mathbf{v}$ de la lluvia con la vertical. En la figura adjunta se representan las ecuaciones (1) y (2).

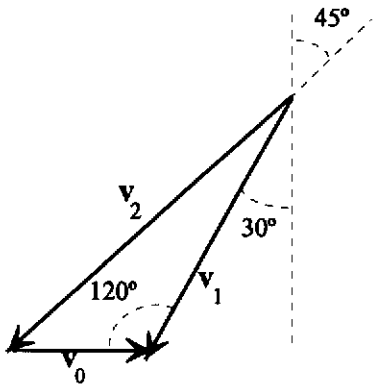


Igualando las ecuaciones (1) y (2) se tiene $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_o + \mathbf{v}_2$, de cuya representación gráfica

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



De la ley del seno se tiene $$\frac{v_o}{\text{sen } 15} = \frac{v_1}{\text{sen } 45} = \frac{v_2}{\text{sen } 120}$$

Operando se obtiene los valores de las velocidades relativas $v_1 = 41$ km/h y $v_2 = 50$ km/h

De la ecuación (1) en componentes se tiene, para el ángulo α

$$\tan \alpha = \frac{v_1 \text{ sen } 30 - v_o}{v_1 \cos 30} = 0.155 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 8,8^\circ$$ La lluvia forma con el suelo un ángulo de 81,2°

y para la velocidad $$v = \frac{v_1 \cos 30}{\cos \alpha} = 35,8 \text{ km/h} = 9,9 \text{ m/s}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

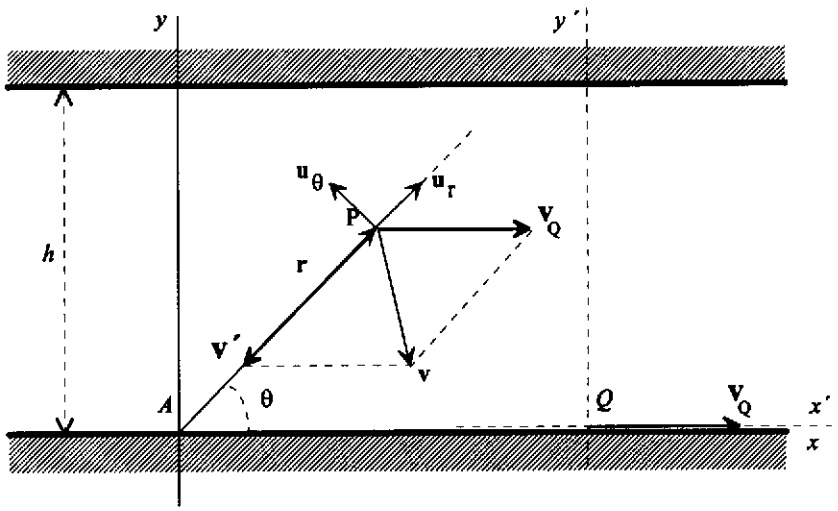
www.elsolucionario.net

PROBLEMA 3-30

El agua de un canal de anchura h se mueve con velocidad constante paralela a las orillas. Una lancha atraviesa el canal con una velocidad respecto del agua tal que su dirección pasa constantemente por un punto fijo A de la orilla opuesta situado perpendicularmente al punto de salida B. La lancha tiene una velocidad constante (módulo) cuyo valor es el doble que la velocidad del agua del canal Determinar la trayectoria de la barca respecto de tierra.

SOLUCIÓN

El origen de la referencia fija O lo tomaremos en el punto A de la otra orilla del canal, en frente del punto B de salida. La velocidad de la lancha v_0 es la velocidad relativa que apunta constantemente hacia A. Un punto Q de la superficie del agua, tal como se muestra en la figura adjunta, será el origen de la referencia móvil cuya velocidad $\mathbf{v}_Q$ es la velocidad del agua del canal.



La velocidad absoluta es la suma de la relativa más la de arrastre $\mathbf{v} = \mathbf{v}_Q + \mathbf{v}'$, en donde el módulo de $\mathbf{v}'$ es v_0. De la figura se deduce que en componentes rectangulares la velocidad absoluta es

$$\mathbf{v} = (v_Q - v_0 \cos\theta)\mathbf{i} - v_0 \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{j}$$

La posición instantánea del punto P (x, y) está dada por el extremo del vector $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$. El seno y el coseno de θ en función de las coordenadas del punto P están dados por las siguientes expresiones

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

valores que dificultan el cálculo de la trayectoria en coordenadas rectangulares. Resultan conveniente determinar la trayectoria en coordenadas polares. La derivada del vector posición $\mathbf{r} = r\,\mathbf{u}_r$ es la velocidad absoluta

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta$$

Igualando componentes con la expresión de $\mathbf{v} = \mathbf{v}_Q + \mathbf{v}'$ en la base polar

$$\mathbf{v} = (v_Q \cos\theta - v_0)\mathbf{u}_r + (-v_Q \operatorname{sen}\theta)\mathbf{u}_\theta$$

se tiene

$$\frac{dr}{dt} = v_Q \cos\theta - v_0 \qquad\qquad r\frac{dr}{dt} = -v_Q \operatorname{sen}\theta$$

De ambos, dividiendo miembro a miembro y multiplicando por $d\theta$, queda

$$\frac{dr}{r} = \left(-\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{2}{\operatorname{sen}\theta}\right)d\theta$$

ecuación diferencial de variables separadas, de la cual se obtiene directamente la trayectoria en coordenadas polares

$$r(\theta) = \frac{h}{\operatorname{sen}\theta}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta\right)$$

Cambiando las coordenadas polares a coordenadas rectangulares $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$ se obtiene la ecuación de la trayectoria

$$y^2 = h^2 - 2hx$$

Nota: $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 3-31

Determinar la desviación respecto del pie de la perpendicular que experimenta un cuerpo que se deja caer desde una altura h sobre el nivel del suelo en un punto de la superficie terrestre de latitud λ.

SOLUCIÓN

Consideremos un sistema de referencia con el origen en el punto O de la superficie terrestre que coincida con el pie de la perpendicular trazada desde la altura h hasta el suelo, el eje x dirigido según el paralelo del lugar hacia el este y el eje y dirigido según el meridiano hacia el norte del lugar. Está referencia tiene un movimiento de rotación respecto de la referencia fija con origen en el centro de la Tierra. Para valores de h pequeños comparados con el radio de la Tierra, la aceleración de un cuerpo que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ respecto de la superficie terrestre está dada por la ecuación (3-83)

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} - 2\,\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}$$

y su expresión en componentes es

$$\mathbf{a} = 2\varpi v \cos\lambda\,\mathbf{i} - g\,\mathbf{k}$$

La aceleración no tiene componente según el eje y, es decir $dv_2/dy = 0$, luego la componente v_2 de la velocidad es constante; pero al ser nula la velocidad inicial, también lo es en cualquier instante, de donde $v_2 = dy/dt = 0$. Las coordenadas del punto inicial son $(0, 0, h)$, luego $y = 0$ y en consecuencia, el movimiento de la partícula tiene lugar en el plano x - z.

Integrando la componente de la aceleración según el eje z, $a_3 = d\,v_3/d\,z = -g$ y teniendo en cuenta las condiciones iniciales para la velocidad se obtiene que la componente de velocidad según el eje z es

$$v_3 = \frac{dz}{dt} = -g\,t$$

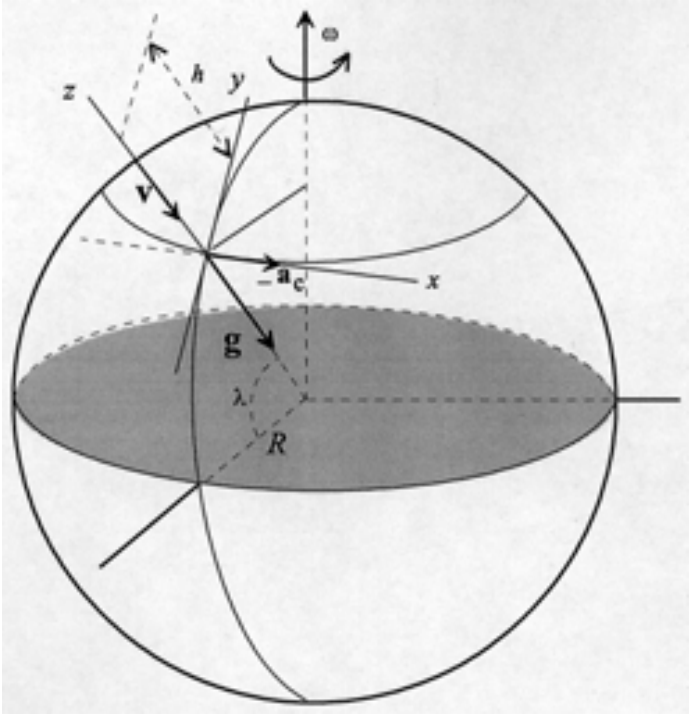
Integrando de nuevo y aplicando las condiciones iniciales para la posición, se tiene la ecuación del movimiento según el eje z

$$z = h - \frac{1}{2}\,g\,t^2$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



Nota: $v = \sqrt{v_1^2 + v_3^2} \cong \sqrt{v_3^2} = gt$. Sustituyendo en la expresión de la aceleración queda para la componente a_1

$$a_1 = 2\varpi g \cos\lambda \; t = \frac{dv_1}{dt}$$

Integrando se obtiene la componente de velocidad según el eje x

$$v_1 = (\varpi g \cos\lambda)t^2 + cte$$

De las condiciones iniciales para la velocidad se tiene que $cte = 0$. La integración de la componente v_1 de la velocidad proporciona la ecuación del movimiento según el eje x

$$x = \frac{1}{3}(\varpi g \cos\lambda)\, t^3$$

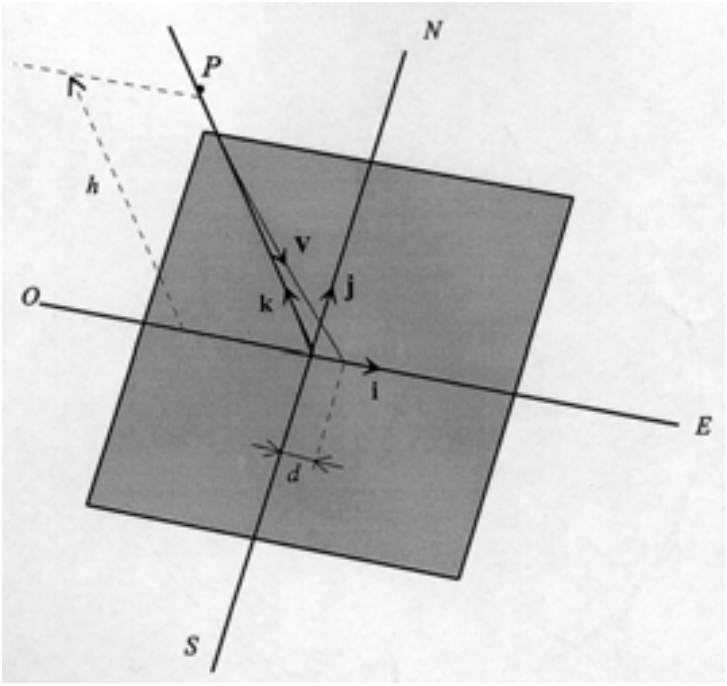
Las ecuaciones del movimiento del movimiento de la partícula son:

$$x = \frac{1}{3}(\varpi g \cos\lambda)\, t^3 \qquad z = h - \frac{1}{2} g t^2$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net



Eliminando el tiempo entre las ecuaciones entre ellas, se obtiene la ecuación de la trayectoria.

$$z = h - \frac{1}{2}\left(\frac{9g\ x^2}{\omega^2\ \cos^2\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}$$

La desviación d es el valor de x correspondiente a $z = 0$. Haciendo $z = 0$ en la ecuación de la trayectoria y operando se obtiene el desplazamiento hacia el este de la partícula

$$d = \left(\frac{2}{3}\ \omega h\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)\cos\lambda$$

Para los valores numéricos $h = 200$ m , $\lambda = 51{,}1°$, $g = 9{,}81$ ms^{-2} queda $d = 3{,}8$ cm.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Capítulo 4 Cinemática del sólido rígido

4.1 Introducción

Un sólido rígido se define como un conjunto de puntos del espacio tales que la distancia entre dos cualesquiera de ellos se *mantiene constante durante el movimiento*. Esta propiedad se denomina *condición de rigidez*. Los cuerpos sólidos en movimiento mantienen, en la mayoría de los casos, prácticamente inalterable su forma durante el movimiento siendo por tanto cinemáticamente equivalentes a un sólido rígido. La *Cinemática del Sólido Rígido* estudia el movimiento de los cuerpos cuando se tienen en consideración sus rotaciones.

El estado cinemático de un sólido en un instante dado, queda completamente definido conociendo las velocidades y aceleraciones de sus puntos, medidas respecto de una determinada referencia, lo cual implica conocer la posición del sólido en dicha referencia. La posición queda fijada dando las coordenadas de tres de sus puntos no alineados, lo que da un total de nueve coordenadas de las cuales, tres de ellas se pueden expresar por medio de la condición de rigidez como combinación de las seis restantes, con lo que únicamente quedan seis coordenadas independientes, que se denominan *coordenadas generalizadas*.

La condición de rigidez impone restricciones al movimiento de tres puntos no alineados del sólido ya que estos han de moverse de manera que las distancias entre ellos no cambien durante el movimiento. Esta limitación hace que sus velocidades no sean independientes. El estado de movimiento de un sólido rígido queda determinado conociendo la velocidad de dos cualesquiera de sus puntos. Establecer la relación que existe entre las velocidades de esos dos puntos cualesquiera de un sólido constituye uno de los objetivos de la Cinemática del sólido rígido. Dicha relación se denomina *ley de distribución de las velocidades*. A partir de ella se deduce, por derivación, la relación entre la aceleraciones, denominada *ley de distribución de las aceleraciones*.

4.2 Movimientos elementales del sólido rígido

El estado de movimiento más simple de un sólido es el de reposo, en el que la velocidad de todos sus puntos es nula. Si el estado de reposo se mantiene en el tiempo, también la aceleración de todos sus puntos es nula. Si el sólido no está en reposo, el movimiento más simple que puede tener es de traslación o de rotación respecto de un eje fijo. Cuando el sólido en rotación se desplaza a lo largo del eje, el movimiento resultante se denomina helicoidal ya que, como veremos más adelante, las trayectorias descritas por los puntos del sólido que no pertenecen al eje son hélices.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

4.2.1 Movimiento de traslación

El más sencillo de los movimientos que puede experimentar un sólido rígido es el movimiento de traslación que se define de la siguiente manera: *el movimiento de un sólido rígido es de traslación, cuando el vector definido por dos cualesquiera de sus puntos se mantiene paralelo así mismo durante el movimiento*. Consideremos un sólido rígido cuyo movimiento es de traslación y sean Q y P dos cualesquiera de sus puntos, figura 4-1. Sean $\mathbf{r}_Q$ y $\mathbf{r}_P$ los vectores que definen las posiciones instantáneas de los puntos Q y P en la referencia fija de origen O. Debido a la condición de rigidez, el módulo del vector definido por los dos puntos del sólido $\mathbf{r}_{PQ}$ ha de ser constante y, por la definición de movimiento de traslación, también su dirección y sentido han de ser constantes.

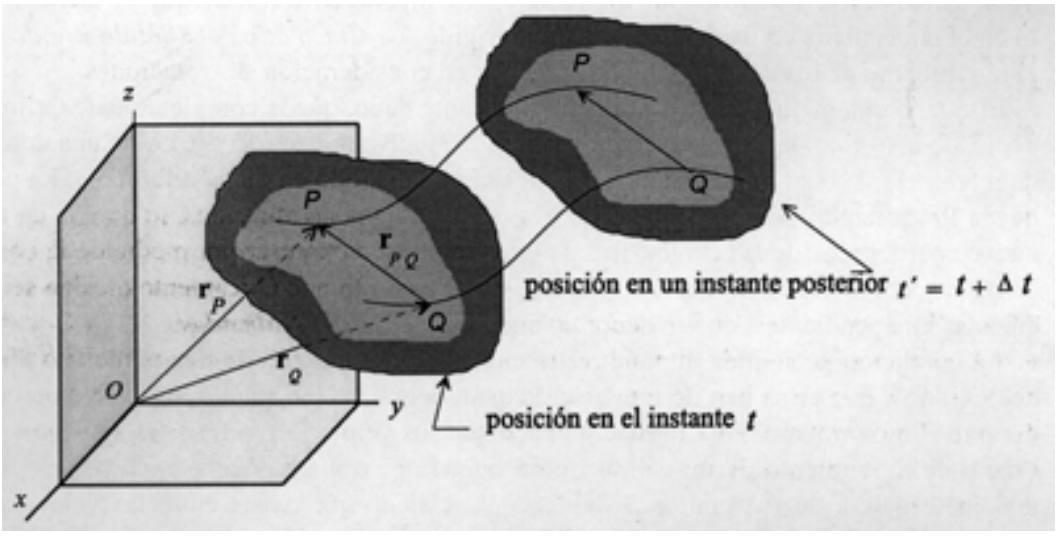


Fig. 4-1

De la figura se deduce la siguiente relación vectorial $\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_{QP}$ entre los vectores posición de ambos puntos, que derivada respecto del tiempo queda

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q \tag{4-1}$$

y derivando de nuevo respecto del tiempo la ecuación (4-1) se tiene

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_Q \tag{4-2}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

De las ecuaciones (4-1) y (4-2) se deduce que si en un instante t un sólido rígido está animado de un movimiento de traslación, entonces *todos los puntos del sólido tienen la misma velocidad y la misma aceleración.* Veamos ahora que las trayectorias son congruentes. Sean $\mathbf{r}_P'$ y $\mathbf{r}_Q'$ los vectores posición de los punto P y Q en un instante posterior $t' > t$. De la condición de rigidez y de la definición de movimiento de traslación se tiene que los vectores posición en los instante t y t'satisfacen la relación $\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_P' - \mathbf{r}_Q'$, de donde se tiene que

$$\Delta \mathbf{r}_P = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}'_P = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_Q' = \Delta \mathbf{r}_Q \tag{4-3}$$

La ecuación (4-3) expresa que el desplazamiento de todos los puntos del sólido entre los instante t y $t' = t + \Delta t$ es el mismo para todos ellos, luego sus trayectorias son congruentes. Si las trayectorias son líneas rectas, la traslación es *rectilínea,* y si son curvas, la traslación es *curvilínea.* El movimiento del sólido en su conjunto queda completamente descrito por el movimiento de uno cualquiera de sus puntos y es, por tanto, formalmente equivalente al movimiento de una partícula.

4.2.2 Movimiento de rotación

Un sólido rígido tiene un movimiento de rotación alrededor de un eje fijo que pasa por él, cuando *dos cualesquiera de sus puntos no cambian de posición durante el movimiento.* De la condición de rigidez se deduce inmediatamente que la velocidad de todos los puntos del sólido alineados con los dos puntos fijos ha de ser nula. En efecto, si Q es un punto alineado con los dos puntos fijos, las distancias de Q a cada uno de los dos puntos fijos se han de mantener constantes durante el movimiento, luego ha de estar en reposo y por tanto su velocidad es nula.

La recta definida por los dos puntos fijos se denomina *eje de rotación* y todos los puntos del sólido pertenecientes al eje tienen velocidad nula. Determinemos ahora la velocidad de los puntos del sólido que no pertenecen al eje. Sea P un punto genérico del sólido que no pertenece al eje de rotación. En un punto O del eje de rotación perteneciente al sólido rígido se toma el origen de la referencia fija. Tomemos el mismo punto O como origen de una referencia vinculada al sólido, tal que sus ejes participen del movimiento del sólido, y que los ejes z y z'de ambas referencias coinciden con el eje de rotación del sólido. Sean $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, y $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ los vectores de las bases de las referencias fija y móvil respectivamente, en donde $\mathbf{k} = \mathbf{e}_3$, tal como se muestra en la figura 4-2. El vector posición $\mathbf{r}_P$del punto genérico P del sólido, es el mismo en ambas referencias.

La velocidad del punto P del sólido en la referencia fija es, cinemáticamente equivalente, a la velocidad de una partícula en referencias en rotación con origen fijo. En la ecuación (3-70) de la cinemática de la partícula relaciona la velocidad de la partícula en ambas referencias, se tiene que incluir ahora la condición de rigidez, con lo cual la velocidad relativa $\mathbf{v}'$ del punto P en la referencia en rotación es cero, luego de la ecuación (3-70) se obtiene que

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

la velocidad del punto genérico *P* del sólido rígido en la referencia fija está dada por

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_P \tag{4-4}$$

donde el vector ω, asociado a la rotación de la base móvil la cual esta unida rígidamente al sólido, es la velocidad de rotación del sólido. El vector ω representativo de la rotación, es un vector sobre el eje de rotación, su módulo es la magnitud de la rotación y, su dirección y sentido determinan la dirección y el sentido de la rotación.

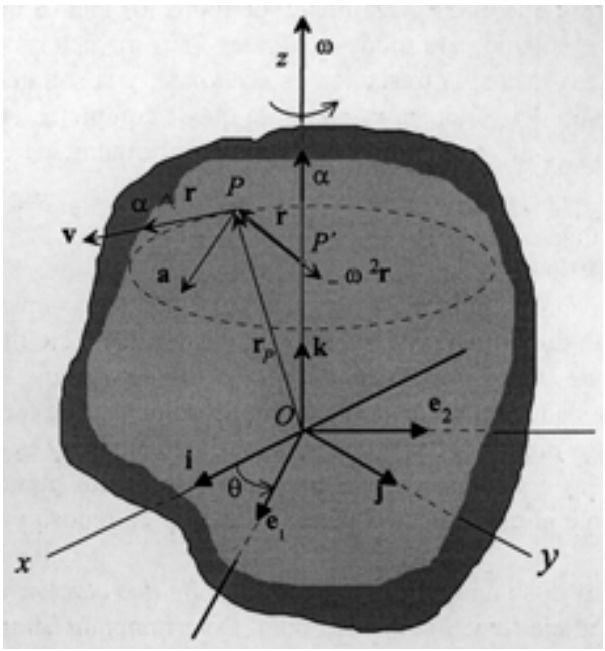


Fig. 4-2

La ecuación (4-4) da la velocidad de un punto cualquier del sólido y es por tanto, la *ley de distribución de velocidades* del sólido. Aplicada para los puntos del eje se deduce inmediatamente que su velocidad es nula ya que para dichos puntos ω y $\mathbf{r}_P$ son vectores paralelos. De una manera análoga, la ecuación (3-71) de la cinemática de la partícula junto a la condición de rigidez, proporciona la aceleración de un punto cualquiera del sólido, ecuación que constituye la *ley de distribución de las aceleraciones*

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \wedge \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}_P) \tag{4-5}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

siendo α la aceleración angular del sólido. Determinemos ahora las trayectorias de los puntos del sólido. La ecuación de la velocidad de un punto del sólido se puede escribir como

$$\mathbf{v} = \omega \wedge \mathbf{r}_P = \omega \wedge \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PQ} \wedge \omega \tag{4-6}$$

La última igualdad de la ecuación (4-6) expresa que la velocidad de un punto del sólido es el momento del vector ω respecto de dicho punto, pero el momento de un vector respecto de un punto es independiente del punto que se tome sobre su recta soporte para formar el producto vectorial. Tomando el punto P' proyección del punto P sobre el eje, la velocidad es

$$\mathbf{v} = \omega \wedge \mathbf{r} \tag{4-7}$$

en donde $\mathbf{r}$ es el radio vector del punto P respecto del eje de rotación. Para la aceleración queda

$$\mathbf{a} = \alpha \wedge \mathbf{r} + \omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{r}) = \alpha \wedge \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r} \tag{4-8}$$

Las ecuaciones (4-7) y (4-8) son las correspondientes a las del movimiento circular de una partícula luego, los puntos que no pertenecen al eje describen circunferencias concéntricas con el eje y situadas en planos perpendiculares a él. El primer sumando de la ecuación (4-8) es la aceleración tangencial del movimiento circular del punto P, $\alpha \wedge \mathbf{r} = \alpha\, \mathbf{k} \wedge \mathbf{r}$ y el segundo sumando su aceleración normal $\omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{r}) = -\omega^2 \mathbf{r}$. Los módulos de la velocidad $\mathbf{v}$ y de la aceleración $\mathbf{a}$ del punto P están dados respectivamente por

$$v = \omega r \qquad a = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \tag{4-9}$$

El movimiento de rotación de un sólido está caracterizado por la aceleración angular α. Si α es cero, la rotación es uniforme, y si es diferente de cero, el movimiento de rotación es uniformemente acelerado si α tiene el mismo sentido que ω o retardado si α es de sentido contrario a ω. De la condición de rigidez se sigue que el ángulo θ girado por el punto P hasta el instante t es el mismo para todos los puntos y es, por tanto, el ángulo girado por el sólido. La velocidad y la aceleración angulares del sólido son las derivadas primera y segunda

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

de θ respecto del tiempo

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{4-10}$$

Las ecuaciones (4-10) son similares a las del movimiento rectilíneo de una partícula cambiando desplazamientos lineales por desplazamientos angulares y velocidad y la aceleración lineal por la angular, luego θ (*t*) es la *ecuación del movimiento* del sólido en rotación con eje fijo. En general, las condiciones del movimiento del sólido se expresan dando la aceleración angular α o la velocidad angular ω en función del tiempo junto con las condiciones iniciales del movimiento. Para la *rotación uniforme* $\alpha = 0$, la velocidad angular es constante y el desplazamiento angular θ está dado por

$$\theta = \theta_o + \omega t \tag{4-11}$$

donde θ_o es la posición angular inicial. Para la *rotación uniformemente acelerada* α = cte, la velocidad y la posición angular están definidas por

$$\omega = \omega_o + \alpha t \qquad \theta = \varpi_o t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \tag{4-12}$$

siendo ω_o es la velocidad angular inicial. Eliminando el tiempo entre las dos ecuaciones (4-12) se obtiene

$$\varpi^2 = \varpi_o^2 \pm 2\theta\alpha$$

El signo – corresponde a un movimiento uniformemente retardado. Eliminando el tiempo entre las ecuaciones (4-10) se obtiene

$$\alpha = \varpi \frac{d\varpi}{d\theta} \tag{4-13}$$

ecuación que permite determinar la posición angular del sólido cuando la aceleración α es función de θ o de ω.

Cuando el eje de rotación no pasa por el cuerpo, ninguno de sus puntos tiene velocidad nula, y todos ellos describen circunferencias concéntricas con el eje, situadas en planos perpendiculares a él.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

4.2.3 Movimiento helicoidal

El *movimiento helicoidal* es la superposición de un movimiento de rotación en torno a un eje fijo y de un movimiento de traslación rectilíneo a lo largo de dicho eje. Para describir el movimiento tomaremos el origen O de la referencia fija en un punto del eje de rotación, tal que los ejes de coordenadas x, y estén situados en un plano perpendicular al eje de rotación. Se elige como origen de la referencia ligada al sólido un punto C perteneciente al eje de rotación, tal que sus ejes de coordenadas x', y' estén también contenidos en un plano perpendicular al eje de rotación. De esta manera, los ejes z y z' de ambas referencias coinciden con el eje de rotación. Sean $\mathbf{v}_C$ y ω las velocidades de traslación y de rotación del sólido en un instante dado. La velocidad del origen C de la referencia unida al sólido es la velocidad de traslación $\mathbf{v}_C$. Sea $\mathbf{r}_P'$ el vector posición de un punto cualquiera P del sólido respecto del origen móvil C, figura 4-3.

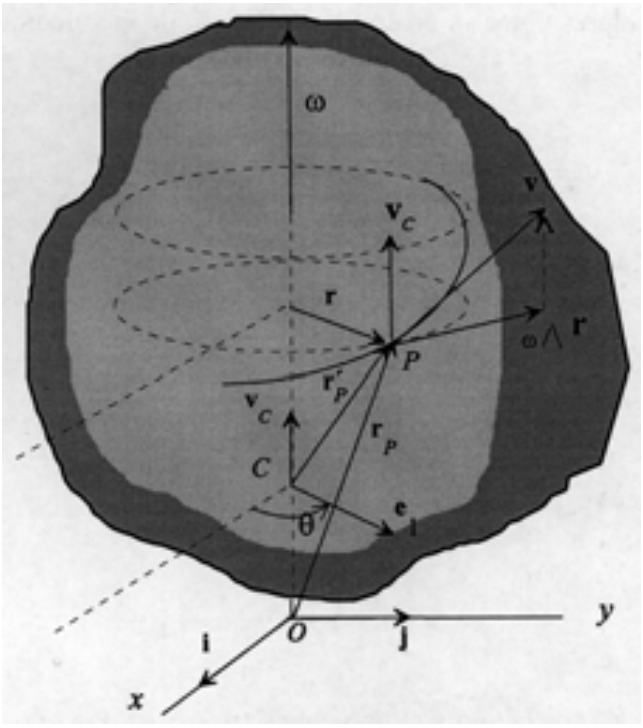


Fig. 4-3

De la ecuación (3-70) sección 3.6.4, que relaciona las velocidades de un punto en referencias en rotación con origen móvil, se tiene que la velocidad $\mathbf{v}$ del punto P en la referencia fija está dada por

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \omega \wedge \mathbf{r}_P' \tag{4-14}$$

El producto vectorial $\omega \wedge \mathbf{r}_P'$ es el momento de ω respecto del punto P y por tanto es igual a $\omega \wedge \mathbf{r}_P$, siendo $\mathbf{r}_P$ el vector posición del punto P respecto del origen O de la referencia fija y también es igual a $\omega \wedge \mathbf{r}$, donde $\mathbf{r}$ es el radio vector del punto P, figura 4-3. Sustituyendo el segundo sumando de la ecuación (4-14) por sus expresiones equivalentes se tiene para la velocidad de un punto cualquiera del sólido la siguiente ecuación

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \omega \wedge \mathbf{r}_P = \mathbf{v}_C + \omega \wedge \mathbf{r} \tag{4-15}$$

La ecuación (4-15) es la *ley de distribución de velocidades* de los puntos del sólido rígido animado de un movimiento helicoidal. La velocidad de un punto es la suma de la velocidad de traslación a lo largo del eje más la velocidad debida a la rotación en torno a él. Ambos vectores son perpendiculares entre sí, de donde el módulo de la velocidad es

$$v = \sqrt{v_C^2 + \varpi^2 r^2} \tag{4-16}$$

Derivando la ecuación (4-15) respecto del tiempo se tiene la *ley de distribución de las aceleraciones.*

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_C + \alpha \wedge \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r} \tag{4-17}$$

La velocidad instantánea del punto P en componentes rectangulares está dada por

$$\mathbf{v} = -\omega r \operatorname{sen}\theta \, \mathbf{i} + \omega r \cos\theta \, \mathbf{j} + v_C \mathbf{k} \tag{4-18}$$

Cuando la velocidad de traslación $\mathbf{v}_C$ y la velocidad de rotación ω tienen valores constantes, la trayectoria del punto es una curva alabeada denominada *hélice*, y el movimiento del sólido es un movimiento *helicoidal uniforme*. Se denomina *paso de hélice* al desplazamiento del sólido a lo largo del eje en un periodo. Su valor está dado por

$$d = v_C T = 2\pi \, v_C / \varpi$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 4.1

El movimiento de rotación de un volante está definido por la ecuación $\theta = 3/18\ t^3$. Determinar : a) su velocidad y aceleración angular ; b) la velocidad y aceleración de los puntos que se encuentran a una distancia $h = 0{,}3$ m del eje en el instante en que las componentes normal y tangencial de la aceleracion tienen el mismo valor.

SOLUCIÓN

a) La velocidad y la aceleración angular del volante están dadas por la primera y segunda derivadas de la coordenada angular respecto del tiempo

$$\varpi = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}t^2 \qquad \alpha = \frac{d\varpi}{dt} = t$$

b) La velocidad lineal de un punto que se encuentra a una distancia h del eje está dada por $v = \omega\ h$, y las componentes de su aceleración son $a_t = \alpha\ h$ y $a_n = \omega^2 h$. Sustituyendo valores queda

$$v = \tfrac{3}{20}t^2 \qquad a_t = 0.3\,t \qquad a_n = \tfrac{3}{40}t^4$$

Igualando las expresiones de las componentes de la aceleración se obtiene el instante en que sus valores coinciden

$$t = 4^{1/3} = 1{,}6s$$

Los valores de la velocidad y de la aceleración en este instante son

$$v = 0{,}8\ \text{ms}^{-1} \qquad a_t = a_n = 0{,}47\ \text{ms}^{-2} \qquad a = 0{,}66\ \text{ms}^{-2}$$

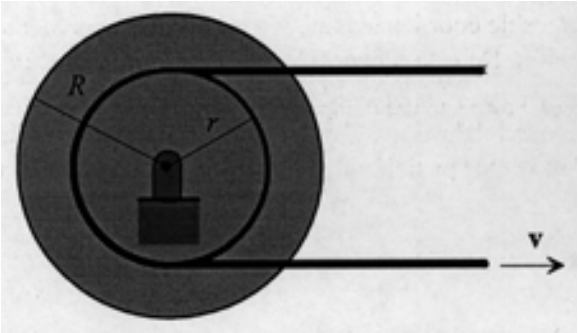
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 4. 2

Una polea de radio $r = 4$ cm , está siendo accionada por una correa cuya velocidad es de 1,6 ms^{-1} y su aceleración de 0, 4 ms^{-2}. Un disco cuyo radio exterior es $R = 12$cm está sujeto al eje de la polea. Determinar: a) la velocidad y aceleración angular del disco; b) la velocidad y aceleración de un punto de la periferia del disco.



SOLUCIÓN

a) Los puntos de la periferia de la polea tienen la misma velocidad que la correa de transmisión. La velocidad angular de la polea es

$$\omega = v/r = 4\ 0 \text{ rad s}^{-1}$$

Esta velocidad angular es también la velocidad angular del disco. La componente tangencial de la aceleración de los puntos de la periferia de la polea es igual a la aceleración de la correa de transmisión, $a_t = \alpha\ r = 0{,}4$ de donde la aceleración angular del disco es

$$\alpha = 10 \text{ rad s}^{-2}$$

b) La velocidad lineal de los puntos del contorno del disco será $\alpha = \omega R = 4{,}8$ ms^{-1} . Las componentes de la aceleración de los puntos del contorno del disco son $a_\tau = \alpha R = 1{,}2$ ms^{-2} y $a_n = \omega^2 R = 192$ ms^{-2}. El valor de la aceleración es

$$a = \sqrt{a_\tau + a_n} = 192{,}0\,ms^{-2}$$

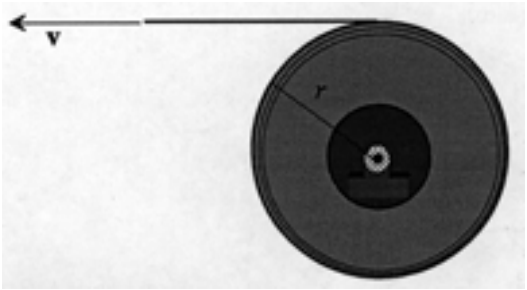
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 4.3

En los procesos de impresión el papel se ha de introducir en la impresora a velocidad constante. Si el radio inicial del rollo de papel es R, el grosor del papel es h y la velocidad constante es v, determinar el valor de la aceleración angular α en función del radio r instantáneo del rollo.



SOLUCIÓN

Sea θ el ángulo girado hasta el instante t. El número de vueltas dado por el rollo de papel hasta ese instante es $\theta/2\pi$. El radio r en el instante t es

$$r = R - h\frac{\theta}{2\pi} = R - \frac{h}{2\pi}\theta$$

siendo función lineal del ángulo girado. La velocidad angular ω en el instante t es $\omega = v/r$, de donde la aceleración angular α es igual a

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dr}\frac{dr}{dt} = -\frac{v}{r^2}\frac{dr}{dt}$$

La derivada de r respecto de t se puede escribir como

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{dr}{d\theta} = -\frac{hv}{2\pi r}$$

Sustituyendo en la expresión de la aceleración angular queda

$$\alpha = \frac{hv^2}{2\pi r^3}$$

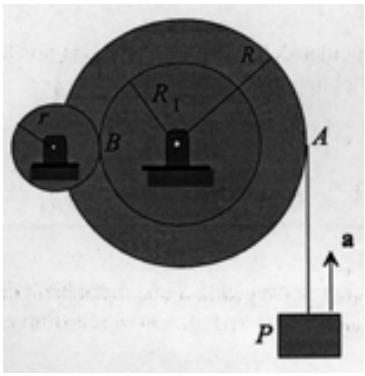
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 4-4

El mecanismo de elevación de la figura adjunta se compone de un cilindro de radio $R = 0{,}5$ m que tiene enrollado un cable. Rígidamente unido a él hay un disco de radio $R_1 = 0{,}3$ m el cual está conectado a otro disco de arrastre de radio $r = 0{,}2$ m . El peso P que esta unido al extremo libre del cable asciende con una aceleración constante de 4 ms^{-2} partiendo del reposo. Determinar la aceleración angular α del disco de arrastre.



SOLUCIÓN

Movimiento del cilindro. El cable unido al cilindro es inextensible, luego la velocidad del punto A del cilindro es igual a la velocidad del peso P, y la componente tangencial de la aceleración del punto A del cilindro es igual a la aceleración del peso P. El movimiento del peso P es rectilíneo uniformemente acelerado , luego su velocidad es $v = a\,t$. La velocidad y aceleración angular del cilindro son respectivamente

$$\omega_1 = v/R = a\,t/R = 8\,t\ s^{-1} \qquad \text{y} \qquad \alpha_1 = a/R = 8\ s^{-2}$$

ambas en sentido antihorario. Al estar el disco de radio R_1 unido rígidamente al cilindro, sus velocidades y aceleraciones angulares son las mismas.

Movimiento del disco de arrastre. La velocidad del punto de contacto B entre los dos discos es la misma. Igualando sus valores expresados en función de las correspondientes velocidades angulares se tiene

$$\frac{\omega}{R_1} = \frac{\omega_1}{r} \qquad \text{de donde} \qquad \omega = 20\,t\ s^{-1} \quad \text{sentido horario.}$$

La aceleración angular es la derivada de ω respecto del tiempo, de donde

$$\alpha = 20\ s^{-2}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

4.3 Movimiento plano del sólido rígido

Un caso particularmente importante del movimiento de un sólido rígido es el movimiento plano, movimiento que tienen los diversos elementos estructurales de una gran mayoría de máquinas o mecanismos, siendo por tanto su estudio de gran importancia en la ingeniería.

4.3.1 Definición del movimiento plano

Un sólido rígido tiene un movimiento *plano si durante el movimiento todos los puntos del sólido se desplazan manteniéndose paralelos a un plano fijo.* Así por ejemplo, una barra o un cuerpo plano de forma cualquiera tal que se muevan manteniéndose constantemente sobre una misma superficie plana, tienen un movimiento plano. También, una barra, un aro o un disco que se mueven manteniéndose en un plano vertical a una superficie horizontal, tiene un movimiento plano.

Para un sólido de forma cualquiera cuyo movimiento sea plano, todos los puntos del sólido que se encuentran en una recta perpendicular al plano fijo tienen, la misma velocidad y la misma aceleración, es decir, sus trayectorias son congruentes. En efecto, sean A y B dos puntos cualesquiera del sólido pertenecientes a una recta perpendicular al plano fijo, figura 4-4, y sean $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ sus posiciones instantáneas respecto de la referencia fija de origen O

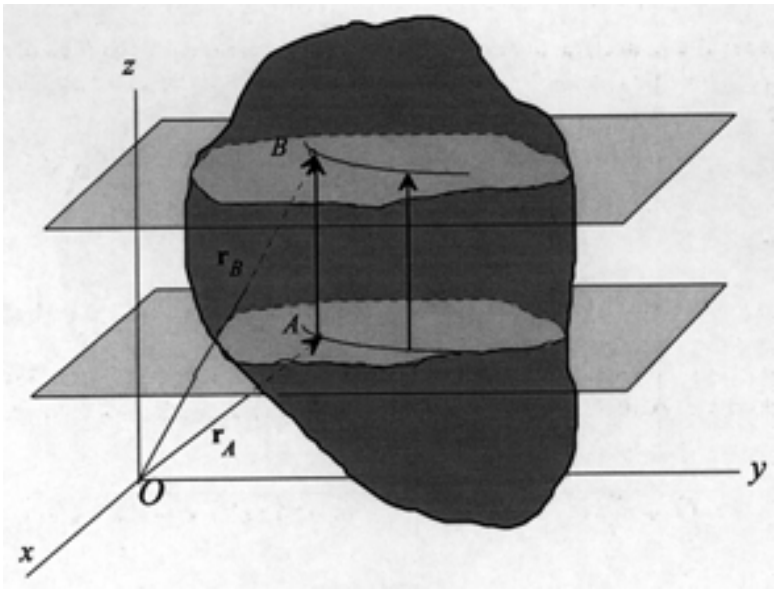


Fig. 4-4

Derivando respecto del tiempo la ecuación vectorial $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \overrightarrow{AB}$ se tiene que las

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

velocidades de ambos puntos son iguales $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A$ y derivando de nuevo la ecuación de las velocidades se tiene que su aceleraciones también son iguales $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A$. Por consiguiente, para estudiar el movimiento plano de un sólido rígido es suficiente con estudiar el movimiento de la figura plana que resulta de la intersección del sólido con un plano paralelo al plano fijo. De esta manera, la cinemática del movimiento plano de sólido cualquiera, se reduce a la de un *sólido plano*, al cual, en lo que sigue, se le denominará simplemente sólido o *placa plana*.

4.3.2 Velocidad de los puntos del sólido

Determinemos ahora la *ley de distribución de velocidades* de los puntos del sólido rígido cuando su movimiento es plano. Tomemos el origen de la referencia fija O en un punto del plano del movimiento con dos de los ejes de coordenadas contenidos en él. Sean Q y P dos puntos cualesquiera del la placa plana, y seleccionemos el punto Q como origen de la referencia vinculada con el sólido. Los vectores posición de los puntos P y Q en la referencia fija, están relacionados con la posición relativa por la ecuación , figura 4-5.

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_Q + \mathbf{r}' \tag{4-19}$$

donde $\mathbf{r}'$ es la posición del punto P respecto del origen Q de la referencia móvil.

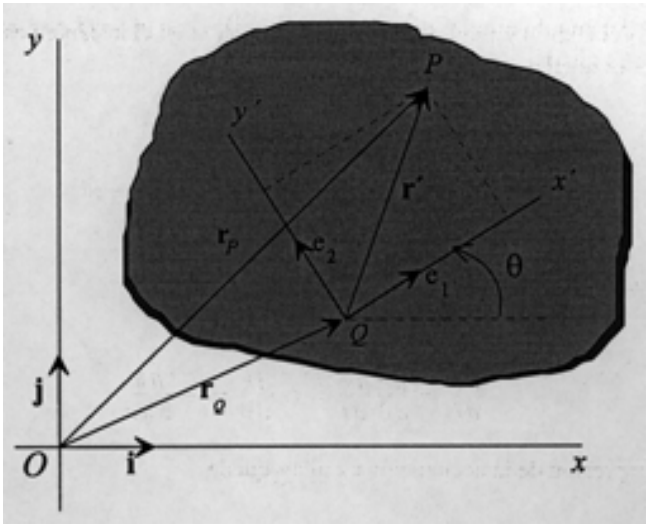


Fig.4-5

Derivando respecto del tiempo la ecuación 4-19 y teniendo en cuenta que la posición

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

relativa de los puntos P y Q no varía durante el movimiento, por lo que la derivada de $\mathbf{r}'$ sólo incluye el término correspondiente a la rotación de la referencia vinculada al sólido respecto de la fija, queda

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \omega \wedge \mathbf{r}' = \mathbf{v}_Q + \omega \wedge \overrightarrow{QP} \tag{4-20}$$

donde $\omega = d\theta/dt$ es la velocidad angular de rotación del sólido cuya dirección se mantiene constantemente perpendicular al plano de la figura, luego ω es un vector paralelo al eje z, siendo su expresión en componentes $\omega = \omega\,\mathbf{k}$. La ecuación (4-20) es la ley de distribución de velocidades y expresa que *el movimiento instantáneo del sólido es la composición de un movimiento de traslación más un movimiento de rotación.* La traslación queda definida por la velocidad $\mathbf{v}_Q$ del punto Q y la rotación por el vector ω sobre la recta perpendicular al plano del movimiento pasando por Q. En la figura 4-6 se han representado por separado el movimiento instantáneo traslación de velocidad $\mathbf{v}_Q$ y el movimiento de rotación ω pasando por el punto Q.

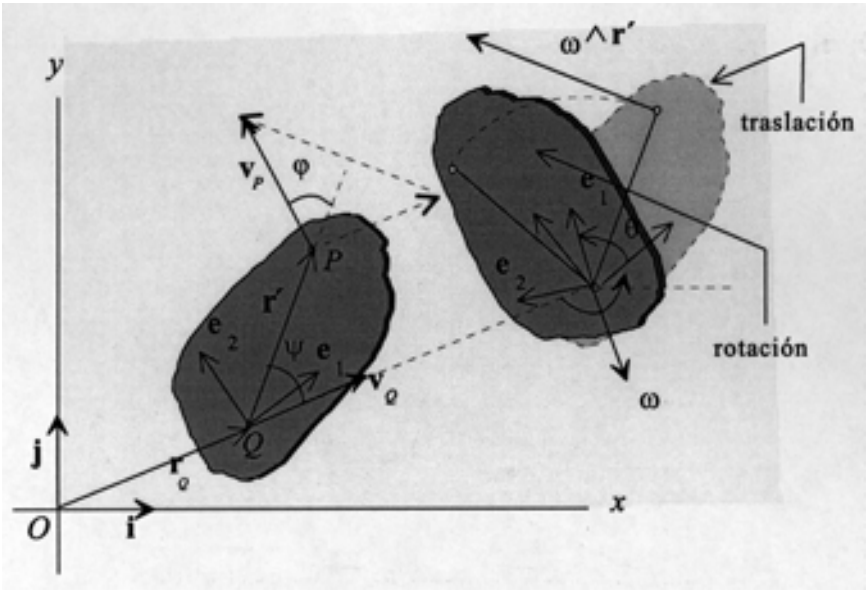


Fig. 4-6

De la ecuación (4-20) se puede deducir una relación entre las magnitudes de las velocidades de los dos puntos. Multiplicando escalarmente por $\mathbf{r}'$ los dos términos de la ecuación y teniendo en cuenta que el producto mixto es cero, queda

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$\mathbf{v}_P \cdot \overrightarrow{QP} = \mathbf{v}_Q \cdot \overrightarrow{QP} \qquad (4\text{-}21)$$

de donde se tiene la igualdad

$$v_P \cos\varphi = v_Q \cos\psi$$

es decir, *las proyecciones de las velocidades de dos puntos cualesquiera del sólido sobre la recta que los une, son iguales*. Este resultado permite determinar fácilmente la velocidad de un punto del sólido cuando se conocen la dirección de su movimiento y la velocidad de otro punto. La ecuación (4-21) que también se puede deducir directamente de la condición de rigidez, se denomina la *condición cinemática de rigidez.*

4.3.3 Centro instantáneo de velocidades

Sea P un punto cualquiera del sólido cuya velocidad sea $\mathbf{v}_P$ y tracemos por P una recta perpendicular a su velocidad, figura 4-7. Veamos que sobre dicha recta hay un punto C tal que su velocidad es cero.

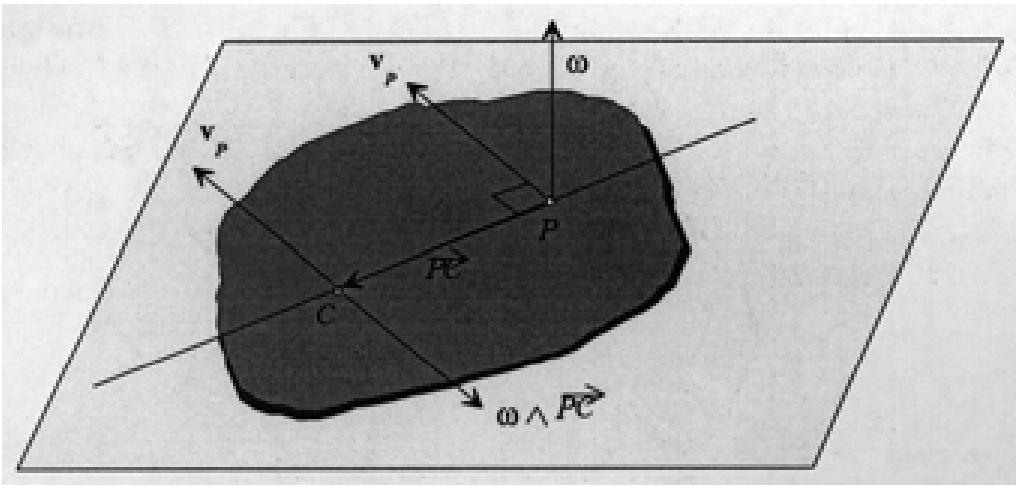


Fig. 4-7

En efecto, según la ecuación (4-20) las velocidades de los puntos C y P están relacionadas por la ecuación

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{PC}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

pero el producto vectorial $\varpi \wedge \overrightarrow{PC}$ es un vector perpendicular a $\overrightarrow{PC}$, luego es proporcional a $\mathbf{v}_P$, es decir

$$\varpi \wedge \overrightarrow{PC} = k\,\mathbf{v}_P \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_C = (1+k)\mathbf{v}_P$$

Tomando el punto C a una distancia de P tal que $k = -1$, la velocidad de C es cero, el segmento $\overline{PC}$ está dado por

$$\overline{PC} = \frac{v_P}{\varpi}$$

y para la velocidad de P queda

$$\mathbf{v}_P = \overrightarrow{PC} \wedge \varpi = \varpi \wedge \overrightarrow{CP} \tag{4-22}$$

La ecuación (4-22) de la velocidad del punto P, es el momento de ω respecto de P, es decir, la velocidad correspondiente a una rotación respecto del punto C, figura 4-8. Este resultado es válido para todos los puntos del sólido, luego se puede enunciar *el movimiento plano de un sólido es un movimiento de rotación instantáneo respecto del punto C*. Dicho punto se denomina *centro o polo instantáneo de velocidades* ya que su posición es función del tiempo. El punto del sólido cuya velocidad en un instante t es nula, es por tanto, el centro instantáneo de velocidades. Si ningún punto del sólido tiene velocidad nula, el centro instantáneo de velocidades C no pertenece al sólido. El punto C también se suele denominar *centro instantáneo de rotación* (c.i.r.).

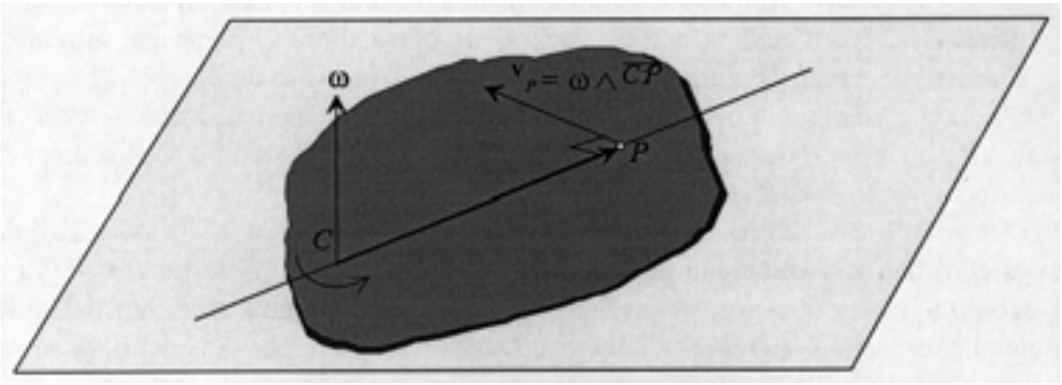


Fig. 4-8

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

La posición del centro de velocidades se puede determinar gráficamente si se conoce en un instante t las velocidades de dos puntos cualesquiera del sólido. Se pueden dar los siguientes casos: 1) si las velocidades de dos puntos del sólido no son perpendiculares a la recta que pasa por los dos puntos, el centro instantáneo de velocidades es el punto de intersección de las perpendiculares a las velocidades, figura 4-9 (a); 2) si las velocidades son perpendiculares a la recta que pasa por los dos puntos, el centro instantáneo es la intersección de dicha recta con la trazada por los extremos de las velocidades, figuras 4-9 (b) y (c). En el caso en que el movimiento instantáneo del sólido sea de traslación, la velocidad de todos sus puntos es la misma, la ω instantánea es cero y el punto C se encuentra en el infinito.

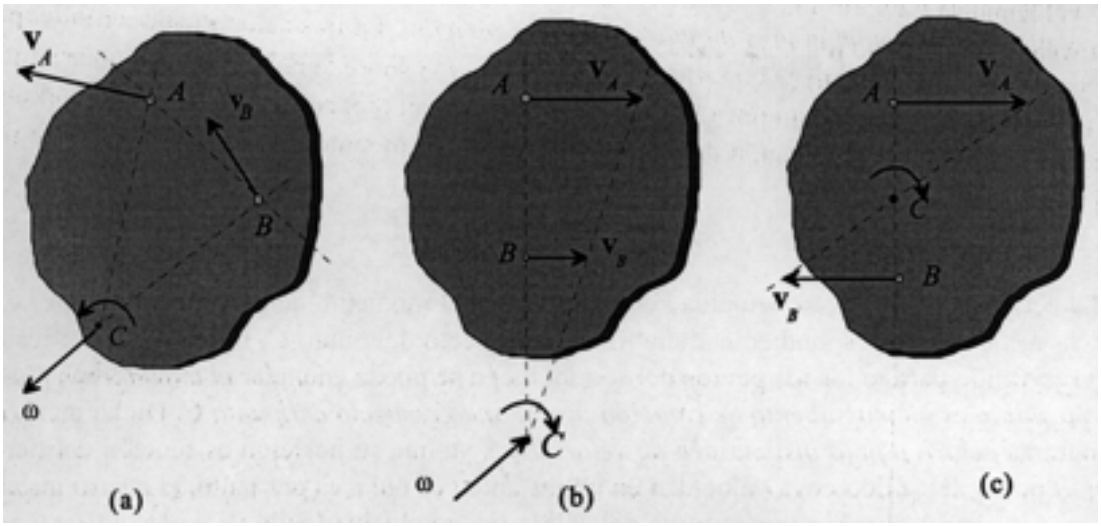


Fig.4-9

Centroide fija y móvil. El punto C cambia en cada instante su posición en el plano respecto de la referencia fija. A medida que la placa se desplaza sobre el plano del movimiento, el punto C describe una curva plana que se denomina *centroide fija o polar fija*. La misma curva vista desde la referencia del sólido se denomina *centroide móvil o polar móvil.* En cada instante, ambas curvas son tangentes entre sí en el punto C y es como sí el centroide móvil rodase sobre el centroide fijo, figura 4-10.

Si en el instante t el centro de velocidades C es un punto del sólido, la velocidad de dicho punto es cero. Pero la velocidad de dicho punto en un instante posterior $t + dt$, ya no será nula, debido a que la nueva posición del punto C coincidirá con otro punto del sólido. Por consiguiente, el punto C tiene velocidad instantánea nula pero, por lo general, la *aceleración instantánea de C es distinta de cero* y por tanto, las aceleraciones de los puntos de la placa no son las debidas a una rotación respecto de C.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

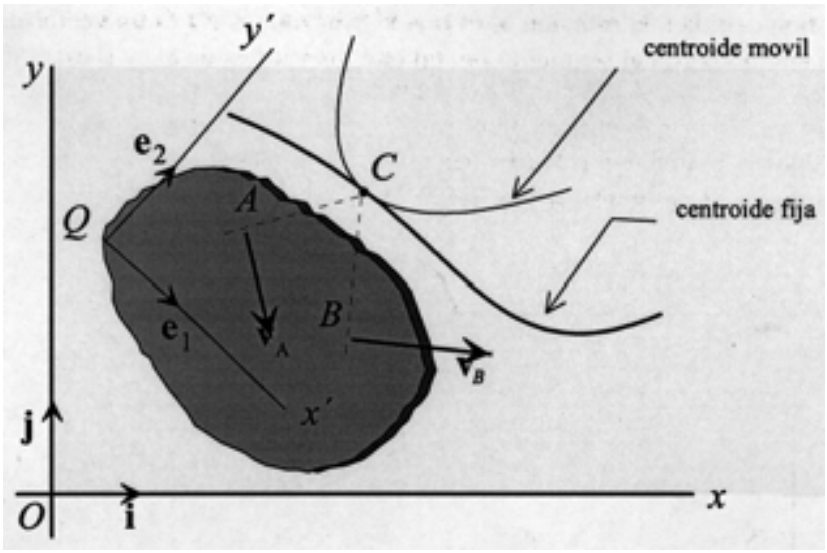


Fig.4-10

4.3.4 Aceleración de los puntos del sólido

La aceleración de un punto P del sólido no se deducen de derivar respecto del tiempo la velocidad dada por la ecuación (4-22), ya que el punto C tiene una aceleración $\mathbf{a}_C$ no nula. Para obtener las aceleraciones de los puntos del sólido, hay que derivar respecto del tiempo la ley de distribución de velocidades dada por la ecuación (4-20), operación que proporciona la *ley de distribución de las aceleraciones* dada por

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_Q + \alpha \wedge \mathbf{r}' + \omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{r}') \qquad (4\text{-}23)$$

La ecuación (4-23) expresa que *la aceleración instantánea de los puntos del sólido es la composición de la aceleración debida a un movimiento de traslación y la de un movimiento de rotación.* Ambos movimientos se han representado separadamente en la figura 4-11, en donde $\mathbf{a}_Q$ es la aceleración de la traslación y $\mathbf{a}_{ro} = \alpha \wedge \mathbf{r}' + \omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{r}')$ la aceleración debida a la rotación. Debido al movimiento de rotación de la placa en torno a Q, el punto P tiene una aceleración tangencial $\alpha \wedge \mathbf{r}'$ perpendicular al segmento $\overline{QP}$, en el sentido de la rotación cuando la rotación es acelerada y en sentido contrario si es retardada, cuyo módulo es $a_t = \alpha r'$, y una aceleración normal $\omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{r}')$ que siempre estás dirigida hacia el polo, cuyo módulo es $a_n = \omega^2 r'$.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

La aceleración debida a la rotación $\mathbf{a}_{ro} = \alpha \wedge \mathbf{r}' + \omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{r}')$ es un vector de módulo a_{ro} que forma un ángulo β con el segmento $\overline{QP}$, tal que los valores de a_{ro} y β están dados por las expresiones

$$a_{ro} = r' \sqrt{\alpha^2 + \varpi^4} \qquad \text{y} \qquad \tan \beta = \frac{|\alpha|}{\varpi^2} \tag{4-24}$$

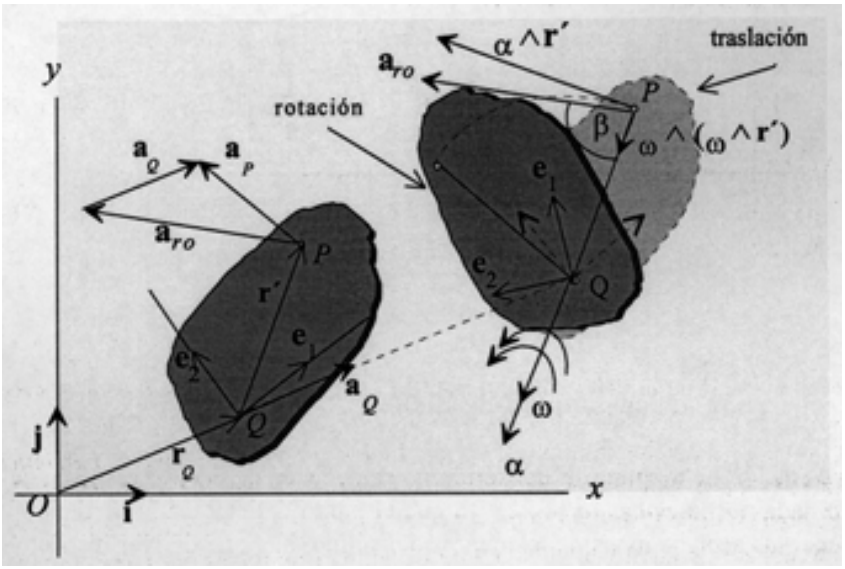


Fig. 4-11

Conocidos los valores de ω y α, el valor de la aceleración $\mathbf{a}_Q$, y el ángulo que $\mathbf{a}_Q$ forma con $\mathbf{r}'$, la ecuación vectorial $\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_Q + \mathbf{a}_{ro}$ permite determinar la aceleración $\mathbf{a}_P$ de un punto cualquiera del sólido. Pero, resulta en general más cómodo el cálculo de las componentes de la aceleración $\mathbf{a}_P$ obtenidas a partir de la ecuación 4-23,

$$a_1 = a_{1Q} - y' \alpha - \omega^2 x' \qquad a_2 = a_{2Q} + x' \alpha - \omega^2 y' \tag{4-25}$$

en donde x', y' son las coordenadas del punto P en la referencia del sólido. En la ecuación (4-23) se puede sustituir directamente el punto genérico Q por el polo del movimiento C y la aceleración de los puntos del sólido se obtiene en función de la aceleración del polo del movimiento

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_C + \alpha \wedge \overrightarrow{CP} - \omega^2 \overrightarrow{CP} \qquad (4\text{-}26)$$

La ecuación (4-26) constituye también la ley de distribución de aceleraciones de los puntos del sólido referida a la aceleración del centro de velocidades, con lo que la aceleración de un punto P es la correspondiente a una traslación con aceleración del polo $\mathbf{a}_C$, mas la debida a una rotación alrededor del polo.

4.3.5 Centro instantáneo de aceleraciones

Cuando el movimiento del sólido *no es un movimiento instantáneo de traslación*, hay un punto del plano cuya aceleración en dicho instante es nula. Dicho punto es *el centro instantáneo de aceleraciones.* Su posición se puede determinar conocidas, la velocidad angular ω, la aceleración angular α y la aceleración $\mathbf{a}_P$ de un punto cualquiera del sólido. Tracemos por el punto una recta cuya dirección no coincida con la de la aceleración $\mathbf{a}_P$ y sea S un punto de dicha recta. La aceleración de S está dada por

$$\mathbf{a}_S = \mathbf{a}_P + \alpha \wedge \overrightarrow{PS} + \varpi \wedge (\varpi \wedge \overrightarrow{PS}) = \mathbf{a}_P + \alpha \wedge \overrightarrow{PS} - \varpi^2 \overrightarrow{PS}$$

donde el vector $\alpha \wedge \overrightarrow{PS}$ es perpendicular a $\overrightarrow{PS}$ y el vector $\varpi^2 \overrightarrow{PS}$ es paralelo a $\overrightarrow{PS}$, tal como se muestra en la figura 4-12.

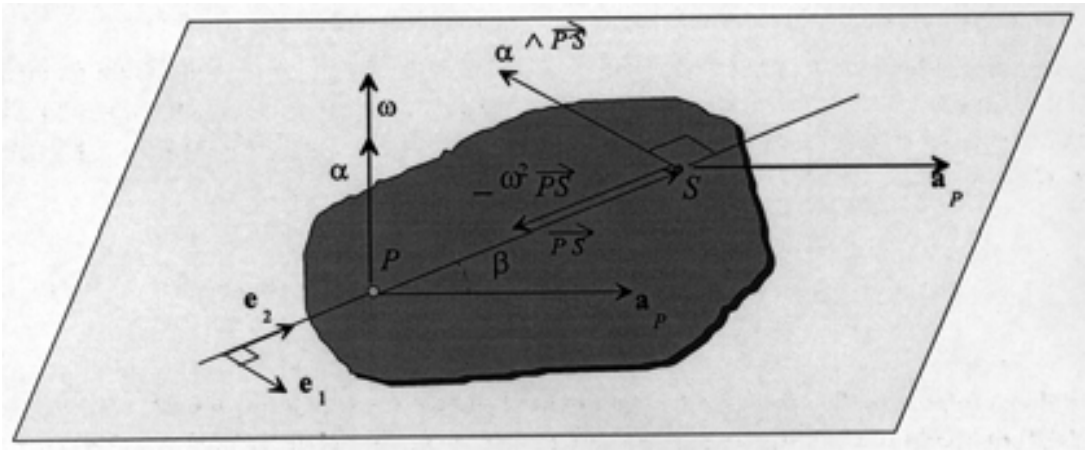


Fig. 4-12

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Sean $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ dos vectores unitarios y perpendiculares tal como se indica en la figura 4-12. La aceleración $\mathbf{a}_P$ en la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ es $\mathbf{a}_P = a_P(\text{sen}\,\beta\mathbf{e}_1 + \cos\beta\mathbf{e}_2)$ y los términos de aceleración correspondientes a α y ω

$$\alpha \wedge \overrightarrow{PS} = -k_1\mathbf{e}_1 \qquad \varpi^2\overrightarrow{PS} = k_2\mathbf{e}_2$$

luego, la aceleración $\mathbf{a}_S$ en la base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ es $\mathbf{a}_S = (a_P \text{ sen } \beta - k_1)\mathbf{e}_1 + (a_P \cos\beta - k_2)\mathbf{e}_2$ cuyo valor es cero si se selecciona el punto S tal que los coeficientes k_1 y k_2 son iguales a

$$k_1 = a_P \text{ sen } \beta \qquad k_2 = a_P \cos\beta$$

valores que determinan unívocamente la posición del punto S, dada por

$$\overline{PS} = \frac{a_P}{\sqrt{\alpha^2 + \varpi^4}} \qquad \beta = \arctan\frac{|\alpha|}{\varpi^2} \qquad (4\text{-}27)$$

Tomando la distancia $\overline{PS}$ sobre una recta que pasa por P y que forme con la aceleración $\mathbf{a}_P$ un ángulo β, queda fijada la posición del punto S, *centro* instantáneo de aceleraciones. Ya que P es un punto cualquier del sólido, se puede afirmar que *la aceleración de los puntos del sólido es la debida a un movimiento de rotación respecto del centro instantáneo de aceleraciones.* Las aceleraciones, en módulo, de los puntos del sólido son *directamente proporcionales a las distancias al punto S* y sus direcciones forman un ángulo β con el segmento definido por el punto y el centro de aceleraciones S, figura 4-13.

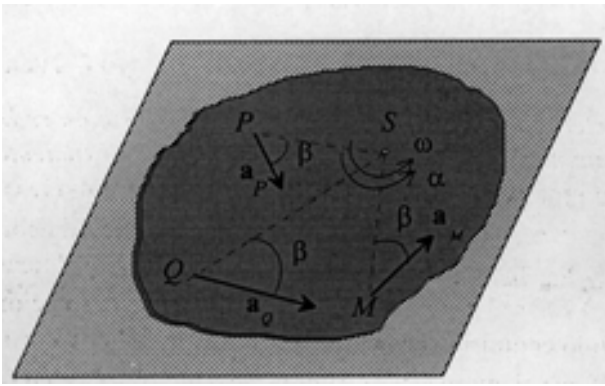


Fig. 4-13

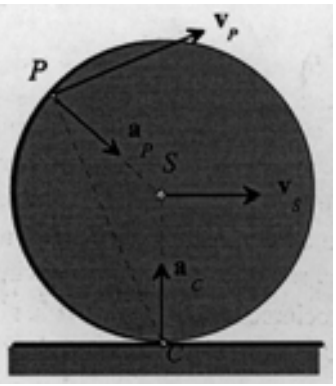


Fig. 4-14

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Recordemos que el centro instantáneo de velocidades C y el centro instantáneo de aceleraciones S son dos puntos *distintos* del plano del movimiento ya que el centro de velocidades tiene velocidad cero pero aceleración distinta de cero, por consiguiente, no puede ser el punto S. Para determinar el ángulo β se toma el valor absoluto de la aceleración angular ya que está puede ser del mismo sentido que la velocidad angular o de sentido contrario.

Consideremos por ejemplo, un disco de radio R que rueda sin deslizar siguiendo una trayectoria rectilínea, desplazándose hacia la derecha con *movimiento uniforme* sobre una superficie horizontal, figura 4-14. La trayectoria del punto central del disco será por tanto, una línea recta. Como el disco *rueda sin deslizar*, el punto del disco que en cada instante está en contacto con la superficie horizontal tiene velocidad cero, luego dicho punto es el centro instantáneo de velocidades C. La velocidad de otro punto cualquiera del disco, por ejemplo el punto P de la periferia, es el momento de ω respecto de P, es decir, un vector perpendicular al segmento $\overline{CP}$ y de módulo $v_P = \omega\,\overline{CP}$, siendo ω la velocidad angular del disco, cuyo valor esta dado por $\omega = v_S / R$, en donde v_S es la velocidad del punto central del disco.

La aceleración del punto central del disco es cero, luego dicho punto es el centro instantáneo de aceleraciones S. Aplicando la ecuación (4-26) al punto S y teniendo en cuenta que la aceleración angular α es cero se tiene

$$0 = \mathbf{a}_C - \varpi^2 \overrightarrow{CS} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}_C = \varpi^2 \overrightarrow{CS} \tag{4-28}$$

La aceleración del punto C de contacto con el suelo, es un vector dirigido hacia el centro del disco de módulo $a_C = R\,\omega^2$. Para este caso, el ángulo β es cero, luego la aceleración de otro punto P cualquiera de la periferia del disco tendrá el mismo módulo que la de C y estará dirigida hacia el centro del disco.

Si el disco *rueda sin deslizar* con una velocidad angular *variable* $\omega(t)$, el punto C de contacto con la superficie horizontal sigue siendo el centro instantáneo de velocidades, pero ahora, el punto central del disco tienen aceleración, luego no es el centro instantáneo de aceleraciones, figura 4-15.

Las velocidades del punto central del disco G y del punto de contacto en el apoyo C están relacionadas por la ecuación

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_C + \varpi \wedge \overrightarrow{CG} = \varpi \wedge \overrightarrow{CG}$$

ya que la velocidad $\mathbf{v}_C$ es nula. Derivando, se tiene la ecuación que relaciona las aceleraciones de los puntos G y C

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_C + \alpha \wedge \overrightarrow{CG} - \varpi^2 \overrightarrow{CG}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

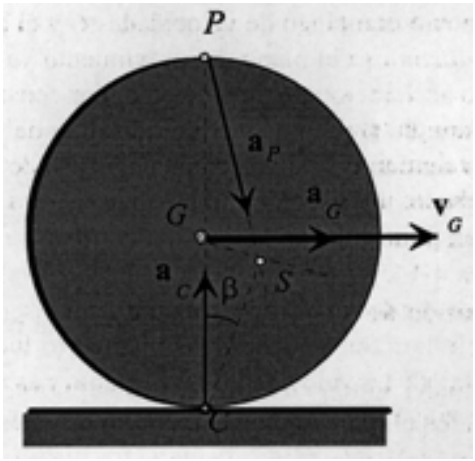


Fig. 4-15

La trayectoria de G es rectilínea lo que obliga a que su aceleración sea perpendicular a $\overrightarrow{CG}$, luego la suma del primer y tercer sumando del segundo término de la ecuación anterior ha de ser cero, de donde se tiene que las aceleraciones de los puntos G y C están dadas por

$$\mathbf{a}_G = \alpha \wedge \overrightarrow{CG} \qquad \mathbf{a}_C = \varpi^2 \overrightarrow{CG}$$

El centro instantáneo de aceleraciones es el punto S cuya posición se determina por medio de las ecuaciones (4-27), tomando como valor de la aceleración la del punto G o la del P.

4.3.6 Movimiento plano en referencias móviles

En las secciones precedentes se ha considerado el movimiento plano del sólido rígido como el movimiento de una placa plana que se mantiene paralela a un plano de referencia. En el plano del movimiento se seleccionaba una referencia fija respecto de la cual se determinan la posición, la velocidad y la aceleración de los puntos del sólido, estableciéndose las relaciones cinemáticas que describen su movimiento.

Pero, en la gran mayoría de aplicaciones técnicas se plantean otro tipo de situaciones en las cuales, el movimiento del sólido está referido a un sistema de coordenadas en movimiento respecto de una referencia que se considera fija en el espacio, o en otros casos, los movimientos de dos puntos están relacionados, pero dichos puntos pertenecen a sólidos rígidos distintos. Para estudiar el movimiento plano en estas circunstancias se toma, tanto la referencia móvil O_1 X, Y como la referencia fija O x, y, ambas contenidas en el plano del movimiento.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

La referencia móvil junto con el sólido se mueven simultáneamente respecto de la referencia fija; a dicho movimiento se le denomina *movimiento de arrastre* del sólido. Además, el sólido se desplaza respecto de la referencia móvil, movimiento al que se le denomina *movimiento relativo* del sólido. El movimiento absoluto del sólido respecto de la referencia fija se denomina *movimiento compuesto.* En este caso, el trabajo de la Cinemática consiste en caracterizar el movimiento del sólido, estableciendo las ecuaciones que relacionan las velocidades de los puntos del sólido y las ecuaciones que relacionan las aceleraciones, mediante las magnitudes cinemáticas de definen el movimiento relativo y el de arrastre.

Velocidad de los puntos del sólido. El movimiento plano de un sólido rígido es equivalente al movimiento de una placa desplazándose sobre una superficie plana. Como en las secciones precedentes, los orígenes de la referencias fija y de la referencia móvil se toman en puntos del plano del movimiento y con dos de sus ejes contenidos en él, figura 4-16. En el caso más general, el movimiento de la referencia móvil respecto de la fija será el correspondiente a una traslación y rotación simultáneas.

Sean $\mathbf{v}_{01}$ y ω_1 las velocidades de traslación y rotación respectivamente y sea P un punto cualquiera del sólido rígido en movimiento respecto de la referencia móvil. Teniendo en cuenta la condición de rigidez, la velocidad absoluta del punto P que ahora denominaremos por $\mathbf{v}_P$, es la suma de la velocidad relativa $\mathbf{v}_r$ más la velocidad de arrastre $\mathbf{v}_{ar}$. En todo lo que sigue, a la velocidad relativa $\mathbf{v}_r$ la denominaremos como $\mathbf{v}_{1P}$.

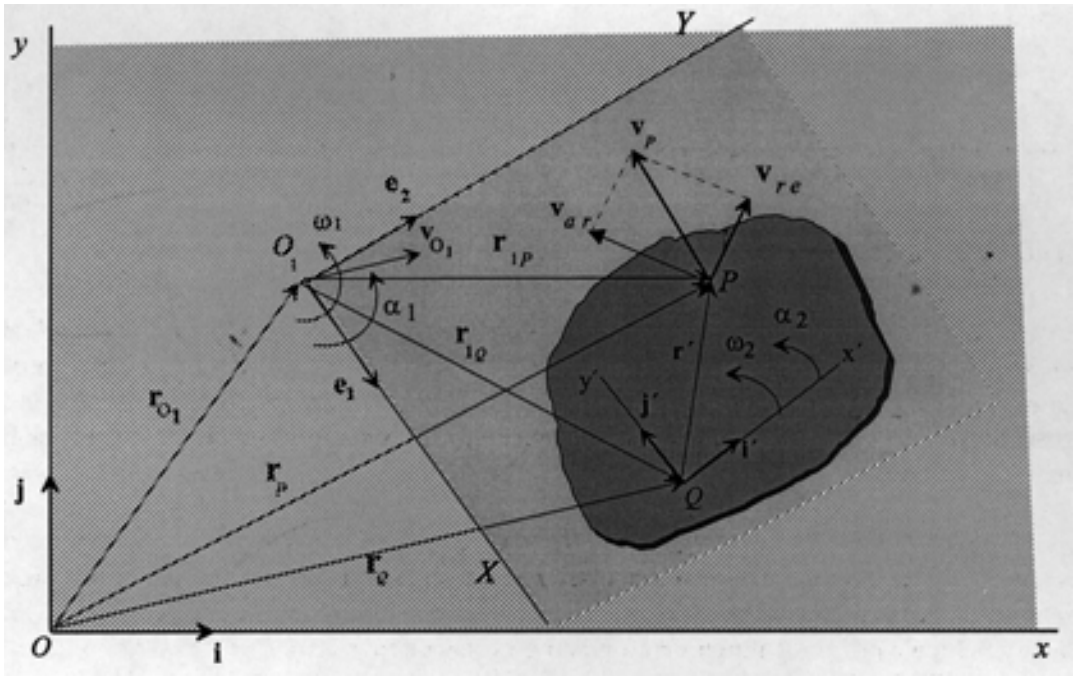


Fig. 4-13

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Sustituyendo valores se obtiene que la velocidad absoluta está dada por

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{1P} + \mathbf{v}_{O_1} + \boldsymbol{\varpi}_1 \wedge \mathbf{r}_{1P} \tag{4-27}$$

Como se ha visto en la sección anterior, la velocidad del punto P respecto de la referencia de origen O_1 hay que relacionarla con la velocidad de otro punto Q del sólido considerado como polo del movimiento respecto de dicha referencia. En el caso más general, el movimiento del sólido en la referencia O_1 es el correspondiente a una traslación y rotación simultáneas y, en este caso, la relación entre las velocidades de los puntos P y Q es

$$\mathbf{v}_{1P} = \mathbf{v}_{1Q} + \boldsymbol{\varpi}_2 \wedge \overrightarrow{\mathrm{QP}} \tag{4-28}$$

donde $\mathbf{v}_{1Q}$ es la velocidad del polo Q, y ω_2 la velocidad de rotación del sólido respecto de Q. La velocidad absoluta del punto Q está dada por una expresión equivalente a la del punto P

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_{1Q} + \mathbf{v}_{O_1} + \boldsymbol{\varpi}_1 \wedge \mathbf{r}_{1Q} \tag{4-29}$$

Las posiciones de los puntos P y Q respecto de la referencia móvil satisfacen la ecuación

$$\mathbf{r}_{1P} = \mathbf{r}_{1Q} + \overrightarrow{\mathrm{QP}} \tag{4-30}$$

Sustituyendo (4-28) y (4-30) en (4-27), y teniendo en cuenta la ecuación (4-29), queda

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + (\boldsymbol{\varpi}_1 + \boldsymbol{\varpi}_2) \wedge \overrightarrow{\mathrm{QP}} = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\varpi} \wedge \overrightarrow{\mathrm{QP}} \tag{4-31}$$

donde $\omega = \omega_1 + \omega_2$ es la suma de las velocidades angulares de la referencia móvil respecto de la fija y del sólido respecto de la referencia móvil. La ecuación (4-31) relaciona las

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

velocidades absolutas de dos puntos del sólido de la misma manera que la ecuación (4-20) relaciona las velocidades de los puntos de un sólido en movimiento respecto de una referencia fija. La velocidad absoluta de un punto del sólido es *la suma geométrica de la velocidad del polo más la velocidad del punto debida a la rotación* ω *del sólido alrededor del polo.* De la misma manera que en la sección anterior, en el movimiento compuesto se define el centro instantáneo de velocidades C como un punto de velocidad nula.

La velocidad de otro punto cualquiera del sólido es el momento de ω aplicado en C respecto de dicho punto, luego el *movimiento compuesto del sólido es una rotación instantánea alrededor de C.* La determinación de C se puede hacer de la forma ya conocida, como intersección de las perpendiculares a las velocidades de dos puntos cualesquiera del sólido, o sino, también, con la velocidad de un de un punto del sólido y la velocidad angular ω mediante la siguiente ecuación

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\varpi} \wedge \overrightarrow{CP} \tag{4-32}$$

donde $\overrightarrow{CP}$ es el vector posición del punto P respecto del punto C, y su módulo la distancia de P a C sobre la perpendicular a la velocidad $\mathbf{v}_P$. Vamos a deducir ahora las velocidades de los puntos del sólido para diferentes casos del movimiento compuesto.

a) *Composición de movimientos de traslación.* Consideremos, en principio, el caso en que el movimiento relativo del sólido es de traslación con velocidad $\mathbf{v}_2$ y el movimiento de arrastre es también un movimiento de traslación con velocidad $\mathbf{v}_1$. De la ecuación (4-31), teniendo en cuenta que las velocidades angulares son nulas, se deduce que todos los puntos del sólido tienen la misma velocidad dada por

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \tag{4-33}$$

El movimiento resultante de dos movimientos de traslación es otro movimiento de traslación cuya velocidad es la suma de velocidades de cada uno de ellos.

b) *Composición de movimientos de rotación y traslación.* Consideremos el caso en que el movimiento de arrastre es un movimiento de traslación y rotación con velocidades $\mathbf{v}_1$ y ω_1 respectivamente, y el movimiento relativo es una traslación con velocidad $\mathbf{v}_2$. De la ecuación (4-31) se deduce que la velocidad de un punto P del sólido está dada por

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\varpi}_1 \wedge \mathbf{r}_{1P} \tag{4-34}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Haciendo coincidir el origen O_1 de la referencia móvil con un punto Q del sólido tomado como polo del movimiento tenemos entonces $\mathbf{r}_{1Q} = 0$, y a partir de la ecuación (4-29) se deduce que la velocidad de Q es $\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. Conocida la velocidad de Q, el centro instantáneo de rotación C se determina mediante la ecuación (4-32) aplicada al punto Q. Tomando módulos queda

$$\overline{CQ} = \frac{v_Q}{\varpi_1} \tag{4-35}$$

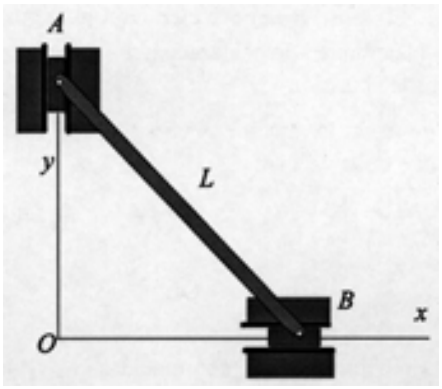
La ecuación (4-35) es la distancia a la que se encuentra de Q el punto C medida sobre la perpendicular trazada a la velocidad $\mathbf{v}_Q$.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 4-5

La barra AB de longitud L desliza a lo largo de las guías horizontal y vertical, tal como se muestra en la figura. El extremo B se mueve hacia la derecha con velocidad constante v_0. Si en el instante inicial la barra estaba en posición vertical, determinar : a) la velocidad y la aceleración angular de la barra en función del tiempo, b) la velocidad y la aceleración del extremo A en función del tiempo,c) la centroide fija y móvil



SOLUCIÓN

Movimiento de la barra. En un instante cualquiera t, la velocidad del punto A tiene la dirección del eje y. El punto de intersección de las perpendiculares a las velocidades de los extremos de la barra es el centro instantáneo de rotación C. La velocidad angular de la barra es un vector perpendicular al plano de la figura dirigido hacia afuera. La velocidad de B en función de la velocidad angular ω de la barra es

$$\mathbf{v}_0 = \omega \wedge \overrightarrow{CB} = \omega\, y\, \mathbf{i}$$

La coordenada y del punto C está relacionada con la coordenada x por la ecuación $y = \sqrt{L^2 - x^2}$, en donde x es el recorrido del punto B desde la posición inicial hasta el instante t; luego $x = v_0\, t$. Sustituyendo la y se tiene la velocidad angular en función del tiempo

$$\varpi = \frac{v_0}{\sqrt{L^2 - v_0^2\, t^2}}$$

La derivada de ω respecto del tiempo es la aceleración

$$\alpha = \frac{v_0^3\, t}{\left(L^2 - v_0^2 t^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Velocidad del punto A. La velocidad del punto A es el momento de ω respecto de A,

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\varpi} \wedge \overrightarrow{CA} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{v}_A = -\frac{v_0^2\, t}{\sqrt{L^2 - v_0^2\, t^2}}\,\mathbf{j}$$

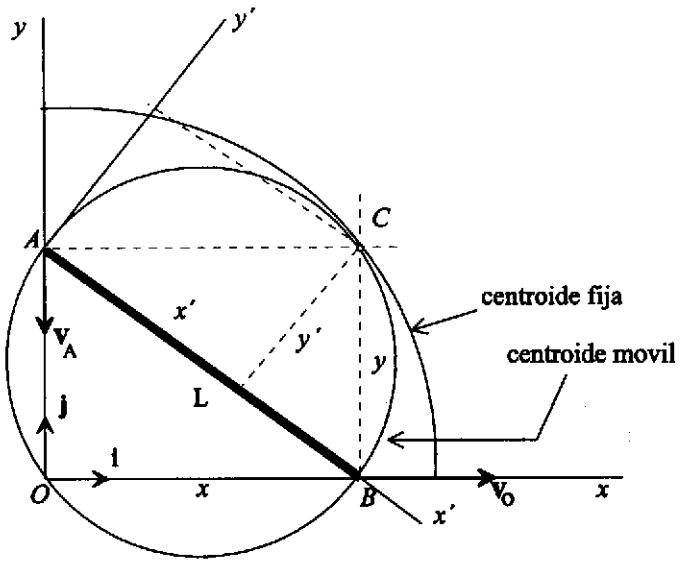
Aceleración del punto A. El punto B tiene aceleración nula ya que su velocidad es constante y, por consiguiente, es el centro instantáneo de aceleraciones G. De la ecuación (3-24) se deduce que la aceleración de A está dada por la ecuación

$$\mathbf{a}_A = \varpi^2 \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \wedge \alpha \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a}_A = -\frac{v_0^2\, L^2}{\left(L^2 - v_0^2\, t^2\right)^{3/2}}\,\mathbf{j}$$

Centroides. De la figura se deduce que las coordenadas (x, y) del punto C en la referencia fija satisfacen la ecuación

$$x^2 + y^2 = L^2 \tag{1}$$

que es la ecuación de una circunferencia de radio L centrada en el origen.



www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Tomando el origen de la referencia móvil, rígidamente unida a la barra, en el extremo A de la barra con el eje x' coincidente con ella las coordenadas (x', y') del punto C están relacionadas con las coordenadas x, y por las ecuaciones

$$x'^2 + y'^2 = x^2 \qquad y'^2 + (L - x'^2) = y^2 \tag{2}$$

Sustituyendo las ecuaciones (2) en (1) se tiene la centroide móvil

$$x'^2 + y'^2 - L x' = 0$$

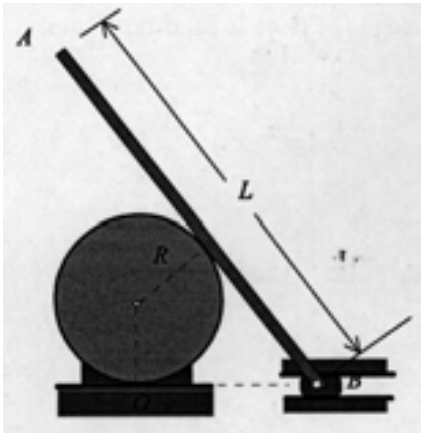
ecuación de una circunferencia de radio $L/2$ con centro en el punto $(0, L)$.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

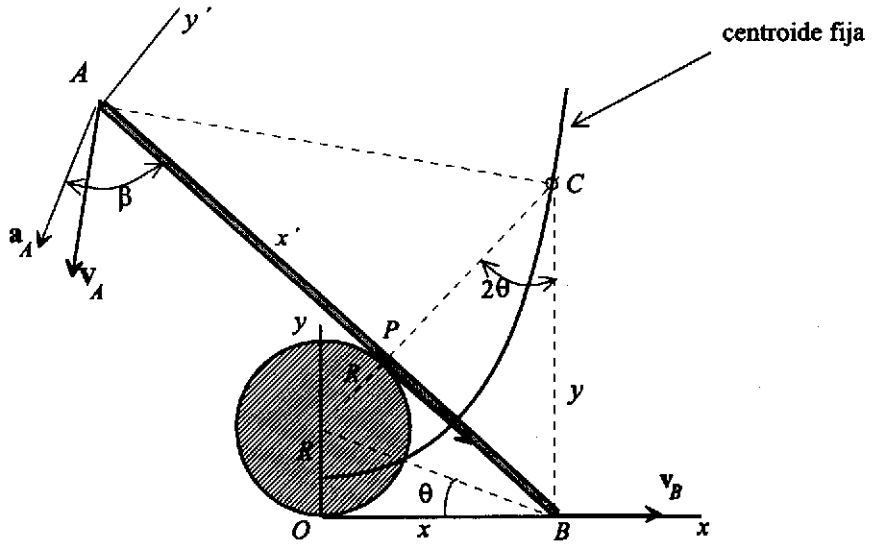
PROBLEMA 4-6

La barra AB de longitud L está apoyada sobre un cilindro de radio R y su extremo B se mueve con una velocidad constante v_0 hacia la derecha a lo largo de una guía horizontal, tal como se muestra en la figura. Determinar en función de la distancia OB : a) la velocidad y aceleración angular de la barra, b) la velocidad y aceleración del extremo A de la barra, c) la centroide fija



SOLUCIÓN

Tomamos como origen de la referencia fija el punto O de contacto de la sección del cilindro con el plano del papel con la horizontal y en el punto A del extremo de la barra el origen de la referencia ligada a ella.



www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Velocidad angular de la barra.
La velocidad del punto P de la barra que está en contacto con el cilindro tiene la dirección de la tangente al cilindro en dicho punto. Llamemos x a la posición instantánea del extremo B respecto del origen O de la referencia fija. Trazando perpendiculares a las velocidades de los puntos P y B se determina la posición del centro instantáneo de velocidades C. La recta que une el punto B con el centro de la circunferencia forma con el eje de la x un ángulo θ y el ángulo que forma la barra con el eje x es el doble 2θ, que es igual al ángulo que forman las perpendiculares a las velocidades de los puntos P y B. La velocidad angular de la barra está relacionada con la velocidad de B por la ecuación $v_0 = \omega y$. De la figura, $x = y \operatorname{sen} 2\theta$. Teniendo en cuenta que $\tan\theta = R/x$, se tiene que

$$\operatorname{sen} 2\theta = \frac{2Rx}{R^2 + x^2}$$

Despejando y sustituyendo se obtiene la expresión de ω $$\boldsymbol{\varpi} = \frac{2Rv_0}{x^2 + R^2}\mathbf{k} \qquad (1)$$

Aceleración angular. $$\alpha = \frac{d\varpi}{dt} = v_0 \frac{d\varpi}{dx} = -\frac{4Rv_0^2 x}{(x^2 + R^2)^2}\mathbf{k} \qquad (2)$$

Velocidad del punto A. $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\varpi} \wedge \overrightarrow{BA} \Rightarrow \mathbf{v}_A = \left(v_0 - \varpi L \operatorname{sen} 2\theta\right)\mathbf{i} - \varpi L \cos 2\theta\,\mathbf{j}$ (3)

siendo $$\cos 2\theta = \frac{x^2 - R^2}{x^2 + R^2}$$

Aceleración del punto A. El punto B tiene aceleración nula, luego es el centro de aceleraciones.

$$\mathbf{a}_A = \alpha \wedge \overrightarrow{BA} - \varpi^2 \overrightarrow{BA} \Rightarrow a_A = \frac{4RLv_0}{(x^2 + R^2)^2}\sqrt{x^2 + R^2 v_0^2}$$

$$\tan\beta = \frac{x}{R}\ ;\ \beta = \frac{\pi}{2} - \theta \Rightarrow \mathbf{a}_A = -a_A(\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j})$$

Centroide fija. Sustituyendo el valor del sen 2 θ en la ecuación que relaciona la x con la y queda la ecuación de una parábola.

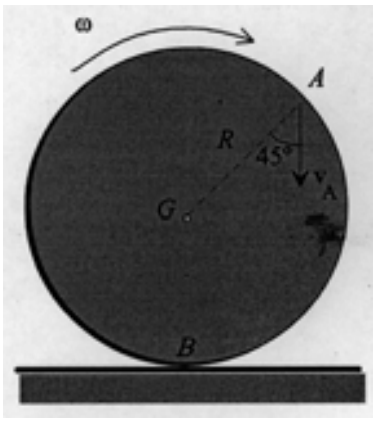
$$y = \frac{x^2}{2R} + \frac{R}{2}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

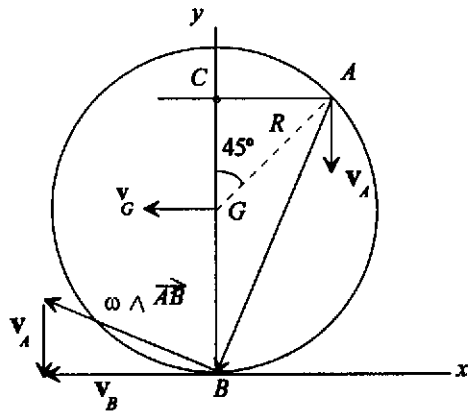
PROBLEMA 4-7

Un disco de radio $R = 0{,}4$ m rueda y desliza sobre un plano horizontal. Su velocidad angular es $\omega = 25$ rd s^{-1} y la velocidad del punto A está dirigida verticalmente hacia abajo, formando con el radio posición del punto el ángulo que se indica en la figura. Determinar : a) la velocidad de deslizamiento, b) el valor de la velocidad del punto A, c) el centro instantáneo de velocidades, d) la velocidad del centro del disco



SOLUCIÓN

Tomamos el origen de la referencia fija en el punto del plano horizontal que coincide con el punto B de contacto del disco con el plano.



Escribamos la velocidad del punto B en función de la velocidad del punto A

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\varpi} \wedge \overrightarrow{AB} = -\varpi R\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{i} + \left(-v_A + \varpi R\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{j}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

La velocidad de B solo tienen componente **j**, luego de su expresión se tiene que

$$\mathbf{v}_B = -17{,}7\,\mathbf{i}\ \text{ms}^{-1} \quad \text{y} \quad v_A = 7{,}07\ \text{ms}^{-1}$$

El centro instantáneo de velocidades C se determina trazando perpendiculares a las velocidades de los puntos A y B. Sus coordenadas son

$$C\,(0,\ 0{,}6828)$$

El módulo de la velocidad del punto G es el mismo que el de la velocidad del punto A, ya que están a la misma distancia del centro instantáneo de velocidades, y la velocidad de G ha de ser perpendicular al segmento CG, luego su expresión es

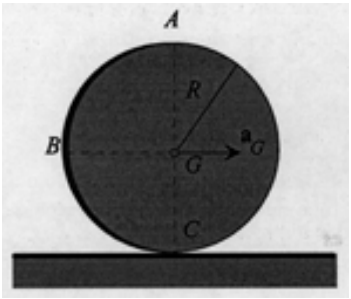
$$\mathbf{v}_G = -7{,}07\,\mathbf{i}$$

www.elsolucionario.net

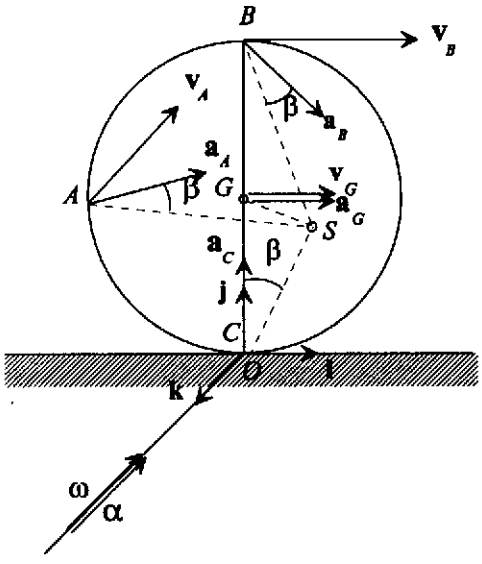
www.elsolucionario.net

PROBLEMA 4-8

Un cilindro de radio R = 1,5 m rueda sin deslizar sobre un plano horizontal. La aceleración $\mathbf{a}_G$ del centro del disco es constante $a_G = 3\ ms^{-2}$ y en el instante inicial su velocidad angular es nula. Determinar en el instante t = 1 s : a) la velocidad del punto G, b) la velocidad angular del cilindro, c) la aceleración angular del cilindro, d) la velocidad de los puntos A y B, e) la aceleración de los puntos A, B y C .



SOLUCIÓN



Velocidad del punto G. El origen de la referencia fija lo tomamos en el punto del plano que coincide con el punto C, punto de contacto del cilindro con el plano, los ejes tal como se indica en la figura adjunta.

La trayectoria del punto G es rectilinea y su movimiento uniformemente acelerado. Aplicando los resultados de la *cinemática del punto* y teniendo en cuenta las condiciones iniciales, la velocidad

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

instantánea del punto G es

$$\mathbf{v}_G = 3\,t\,\mathbf{i} = 3\,\mathbf{i}\ \text{ms}^{-1}$$

El cilindro rueda sin deslizar, luego la velocidad del punto de contacto C del cilindro con el plano es nula, es decir que el punto C es el centro instantáneo de velocidades. El punto C lo tomaremos como polo del movimiento.

Velocidad angular. La velocidad del punto G respecto de C está dada por

$$\mathbf{v}_G = \boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{CG} = -\,\omega_3 R\,\mathbf{i}$$

Igualando ambas expresiones de $\mathbf{v}_G$ se tiene $\boldsymbol{\omega} = -2\,t\,\mathbf{k} = -2\,\mathbf{k}\ \text{rad s}^{-1}$

Aceleración angular. La aceleración angular es la derivada respecto del tiempo de la velocidad angular

$$\boldsymbol{\alpha} = -2\,\mathbf{k}\ \text{rad s}^{-2}$$

Velocidad de los puntos A y B. Sus velocidades están dadas por las expresiones

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{CA} = 2.12\,t(\mathbf{i}+\mathbf{j}) = 2.12(\mathbf{i}+\mathbf{j})\ \text{ms}^{-1} \qquad \mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{CB} = 6\,t\,\mathbf{i} = 6\mathbf{i}\ \text{ms}^{-1}$$

Aceleración de los puntos A , B y C. Sus aceleraciones están dadas por las expresiones

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_G + \boldsymbol{\alpha} \wedge \overrightarrow{GA} - \omega^2\,\overrightarrow{GA} = 9\,\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_G + \boldsymbol{\alpha} \wedge \overrightarrow{GB} - \omega^2\,\overrightarrow{GB} = 6(\mathbf{i}-\mathbf{j})$$

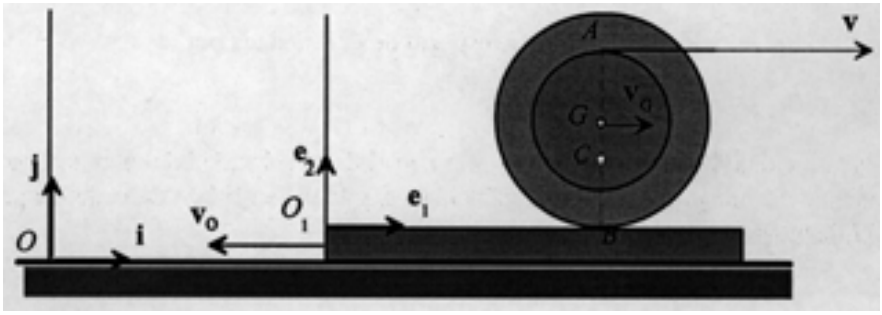
$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_G + \boldsymbol{\alpha} \wedge \overrightarrow{GC} - \omega^2\,\overrightarrow{GC} = 6\mathbf{j}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 4-9

Un disco de radio r que dispone de un resalte circular de radio r_0 rueda sin deslizar sobre una plancha que se desplaza sobre una superficie horizontal con velocidad v_0 constante hacia la izquierda. En el resalte hay enrollado un cable inestensible cuyo extremo se mueve con una velocidad v horizontal constante hacia la derecha. Determinar: a) la velocidad angular de la polea , b) la velocidad del centro de la polea , c) el centro instantáneo de rotación



SOLUCIÓN

Velocidad angular del disco. La velocidad del punto A de la polea es la misma que la del extremo del cable, y la velocidad relativa del punto B es cero. La posición del punto A es

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1B} + \overrightarrow{BA}$$

Derivando respecto del tiempo queda

$$\mathbf{v} = v\mathbf{i} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{BA} = -v_0\,\mathbf{i} - \omega_3 (r + r_0)\mathbf{i}$$

de donde

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_3\,\mathbf{k} = -\left(\frac{v_0 + v}{r + r_0}\right)\mathbf{k}$$

Velocidad de G. Aplicando la ecuación de la velocidad al punto G se tiene

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \wedge \overrightarrow{BG} = \left(\frac{r v - r_0 v_0}{r + r_0}\right)$$

Centro instantáneo de velocidades. El centro instantáneo es un punto de velocidad nula, luego de la ecuación de la velocidad se tiene $0 = -v_0\,\mathbf{i} + \omega\, BC\,\mathbf{i}$. La posición de C queda definida por el segmento

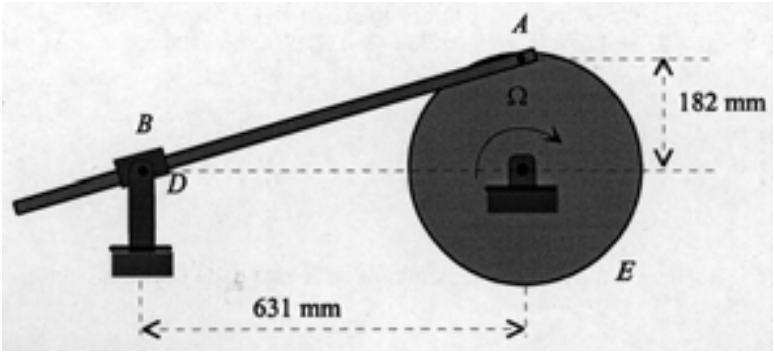
$$\overline{BC} = \left(\frac{v_0}{v_0 + v}\right)(r + r_0)$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

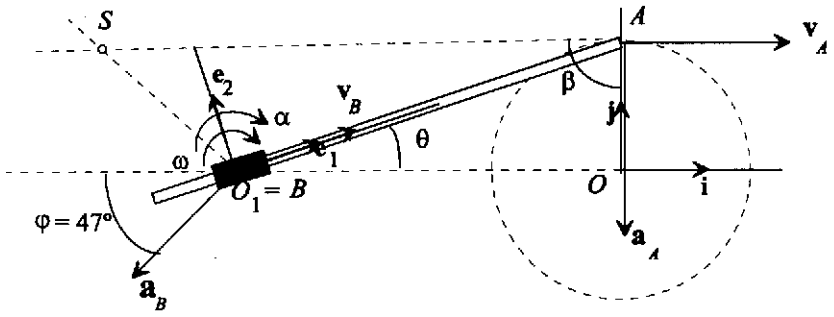
PROBLEMA 4-10

El disco *E* de la figura gira en sentido horario con una velocidad angular constante de 20 rad / s. En el instante representado, determinar : a) la velocidad angular de la barra b) la aceleración del punto *B* de la barra en contacto con la deslizaderac) la aceleración angular de la barra



SOLUCIÓN

Las referencias fija y móvil se toman tal como se muestra en la figura adjunta. La referencia de la barra coincide con la móvil en el instante considerado. La velocidad del extremo de la barra es igual a la del punto de la periferia del disco coincidente con él, luego su valor es $v_A = 3{,}64\ \text{ms}^{-1}$. Su aceleración es la correspondiente a un movimiento circular uniforme, es decir, $a_A = 72{,}8\ \text{rs}^{-2}$.



Velocidad angular de la barra. Derivando la ecuación

$$\mathbf{r}_A = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1A} = \overrightarrow{OO_1} + \mathbf{r}_1$$

respecto del tiempo se tiene

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\varpi} \wedge \mathbf{r}_1$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

siendo $\mathbf{v}_{re}$ la velocidad relativa de la barra, ω la velocidad angular de ambas, y $\boldsymbol{\varpi} \wedge \mathbf{r}_1$ la velocidad de arrastre. Expresando las tres velocidades de (1) en la base móvil e identificando el coeficiente en ambos términos se tiene

$$v_{re} = v_A \cos\theta = 3.5 \text{ ms}^{-1} \qquad \varpi_3 = -\frac{v_A}{r_1} \operatorname{sen}\theta = -1,59 \text{ rd s}^{-1} \tag{2}$$

Aceleración del punto B. Aplicando la ecuación (3-43) al punto B queda que el valor de su aceleración expresada en la base móvil es

$$\mathbf{a}_B = a_{re}\,\mathbf{e}_1 + 2\varpi_3 v_{re}\,\mathbf{e}_2 = a_{re}\,\mathbf{e}_1 - 11,13\,\mathbf{e}_2 \tag{3}$$

La relación entre la aceleración de B y la aceleración de A está dada por la ecuación (3-44)

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \alpha \wedge \mathbf{r}_1 - \varpi_3^2\,\mathbf{r}_1 \tag{4}$$

Expresando las aceleraciones del segundo término de la ecuación (4) en la base móvil e identificando con la (3) los coeficientes de $\mathbf{e}_1$ se tiene

$$a_{re} = -a_A \operatorname{sen}\theta + \varpi_3^2 r_1 = -18,47 \text{ ms}^{-2} \tag{5}$$

La aceleración de B en la referencia móvil es $\mathbf{a}_a = -18,47\,\mathbf{e}_1 - 11,13\,\mathbf{e}_2$. Aplicando la matriz del cambio de base, la aceleración de B en la referencia fija es

$$\mathbf{a}_a = -14,70\,\mathbf{i} - 15,80\,\mathbf{j}$$

Aceleración angular. Identificando los coeficientes de $\mathbf{e}_2$ entre (3) y (4) se tiene la aceleración angular

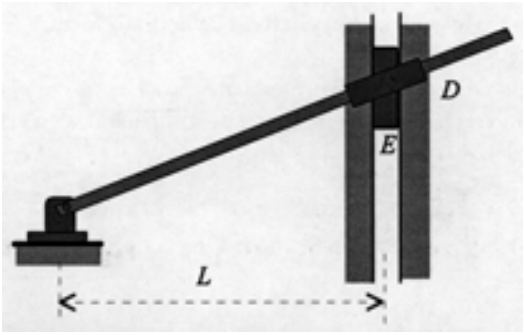
$$\alpha_3 = \frac{-a_A \cos\theta - 2\varpi_3 v_{re}}{r_1} = -93,2 \text{ rds}^{-2} \tag{6}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

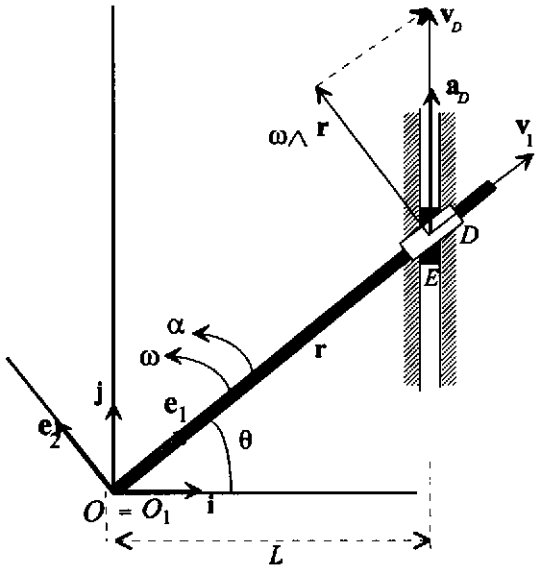
PROBLEMA 4-11

La barra de la figura gira con velocidad angular ω y aceleración angular α constantes en santido antihorario pasando por la deslizadera D la cual está unida a un bloque E que se desplaza por la ranura vertical. Determinar:a) la velocidad y la aceleración de la deslizaderab) la velocidad y la aceleración relativas de la deslizadera



SOLUCIÓN

El movimiento de la deslizadera es el mismo que el del bloque E al cual está unida mediante un eje. El bloque solo puede desplazarse a lo largo del eje y, por lo que su velocidad y aceleración solo tienen componente **j**. El origen de la referencia fija y móvil se toman en el centro de rotación de la barra tal como se indica en la figura adjunta.



El vector posición del punto D en ambas referencias coincide, luego $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{O_1D} = \mathbf{r}$. Derivando se tiene la velocidad

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\varpi} \wedge \mathbf{r}$$

y derivando de nuevo, la aceleración

$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_1 + \boldsymbol{\alpha} \wedge \mathbf{r} + \boldsymbol{\varpi} \wedge (\boldsymbol{\varpi} \wedge \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\varpi} \wedge \mathbf{v}_1$$

siendo $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{a}_1$ la velocidad y la aceleración relativas de la deslizadera.

Velocidad de D. La velocidad de D en la referencia móvil es $\mathbf{v}_D = v_1\,\mathbf{e}_1 + \omega\, r\,\mathbf{e}_2 = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j}$. Mediante la matriz del cambio de base se determinan sus componentes en la referencia fija

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & v_1 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & \varpi r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1\cos\theta - \varpi r \operatorname{sen}\theta \\ v_1 \operatorname{sen}\theta + \varpi r \cos\theta \end{bmatrix}$$

La componente de la velocidad según i es nula, luego $v_x = v_1 \cos\theta - \omega\, r \operatorname{sen}\,\theta = 0$, de donde se tiene la velocidad relativa

$$v_1 = \frac{\varpi L}{\cos^2\theta} \operatorname{sen}\theta \tag{1}$$

Sustituyendo su valor en la expresión de la componente **j** queda para la velocidad de D

$$\mathbf{v}_D = \frac{L\varpi}{\cos^2\theta}\,\mathbf{j} \tag{2}$$

Aceleración de D. La aceleración se puede obtener utilizando el mismo procedimiento, es decir, expresando la aceleración en la referencia móvil, determinando las componentes en la referencia fija e igualando a cero la componente x. Pero en este caso, una simple derivación de la ecuaciones (1) y (2) respecto del tiempo proporciona el resultado. La aceleración relativa es

$$a_1 = \frac{L}{\cos\theta}\left[\varpi^2 + (\alpha + 2\varpi^2 \operatorname{tag}\theta)\operatorname{tag}\theta\right]$$

y la aceleración está dada por

$$\mathbf{a}_D = \frac{L}{\cos^2\theta}(\alpha + 2\varpi^2 \operatorname{tag}\theta)\,\mathbf{j}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Capitulo 5 Fundamentos de la mecánica

5.1 Introducción

La Mecánica estudia las interacciones entre los cuerpos materiales, formulando las leyes generales que rigen su estado de *equilibrio* o de *movimiento*. En los capítulos precedentes, es han deducido las leyes que describen el movimiento de la partícula y del sólido rígido, definido como un conjunto de puntos del espacio que mantienen fijas sus distancias relativas durante el movimiento. En la Cinemática, para establecer las leyes del movimiento se han utilizado únicamente dos magnitudes físicas, el espacio y el tiempo. Ahora bien, el modelo geométrico del movimiento de los cuerpos en el espacio vacío debe de ser modificado cuando los resultados obtenidos se quieren aplicar a la descripción del movimiento de los cuerpos en el espació físico, por una parte, dotando de naturaleza material al sólido rígido y de otra, considerando el espacio euclídeo como el sustrato matemático del espacio físico en el cual tienen lugar todos los fenómenos observados.

La magnitud física ***masa*** define el contenido *material* de los cuerpos, los cuales evolucionan en el seno del espacio físico interaccionando entre si. La magnitud física que expresa la medida cuantitativa de la interacción mecánica de los cuerpos se denomina ***fuerza***. El estudio de los cuerpos en movimiento bajo la acción de las fuerzas que actúan sobre ellos corresponde a la *Dinámica*.

Los cuerpos están constituidos por un conjunto de puntos materiales o partículas, entendiendo la partícula como una cantidad de materia que ocupa un punto en el espacio prescindiendo de su forma y dimensiones. Recordemos que esta simplificación permite prescindir de los movimientos internos del cuerpo, tal como se indicó en la Cinemática. Por definición, las posiciones relativas de las partículas que forman un sólido rígido se mantienen inalteradas durante el movimiento. La condición de rigidez es una idealización del comportamiento de los cuerpos reales, los cuales siempre sufren una cierta deformación bajo la acción de las fuerzas que actúan sobre ellos. El estudio de las deformaciones de los sólidos constituye el objetivo de la teoría de la elasticidad.

Las condiciones generales de equilibrio de los cuerpos dependen de su estado, según sea sólido, líquido o gaseoso. El equilibrio de líquidos y gases es el objeto de estudio de la estática de fluidos. En lo que sigue, se entenderá que la ***estática*** comprende únicamente el estudio del equilibrio de los *cuerpos sólidos*. Todos los cuerpos sólidos se deforman más o menos al estar sometidos a la acción de fuerzas exteriores. La intensidad de la deformación depende de la naturaleza del material del sólido, de su forma geométrica, de sus dimensiones y de la manera de aplicar los esfuerzos. En condiciones normales de trabajo, las

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

deformaciones de los sólidos producidas por las fuerzas que actúan sobre ellos tienen valores muy pequeños, y en consecuencia, para establecer las condiciones generales de equilibrio de los sólidos es admisible prescindir de las deformaciones y considerar que los *sólidos se comportan como si fueran indeformables*. De está forma, los sólidos que consideraremos en la estática se comportan como sólidos rígidos, a los que denominares genéricamente como cuerpos.

5.2 Masa y densidad

Todos los cuerpos materiales están formados por un agregado de átomos o moléculas que ocupa un cierto volumen del espacio. Se enuncia ahora como *axioma*, la posibilidad de hacer corresponder a *todo sistema material* un número positivo denominado ***masa*** del sistema, con la propiedad de que la masa de un cuerpo es la suma de las masa de sus partes constituyentes. La definición operativa de masa así como su unidad en el S.I., el kilogramo (kg), se dará en el apartado 5.5.

Densidad. La masa de los cuerpos se considera que está distribuida de una manera *continua* en la zona del espacio ocupada por el cuerpo. De esta forma, cada elemento de espacio tiene asociada una cantidad de masa diferencial *dm*; el cociente entre la masa y el elemento de espacio define la *densidad* del cuerpo.

La distribución de masa en el espacio puede ser lineal, superficial o cúbica. Los sólidos rígidos cuya distribución de masa es tal que la sección transversal es despreciable frente a la longitud, se definen como cuerpos lineales o *líneas, figura* 5-1; los sólidos rígidos cuya distribución de masa es tal que el grosor es despreciable frente a el área de la superficie que ocupan, se definen como cuerpos superficiales o *áreas, figura* 5-2 y los sólidos rígidos cuya distribución de masa es tal que las tres dimensiones son del mismo orden de magnitud, se definen como cuerpos volumínicos o *volúmenes*, figura 5-3.

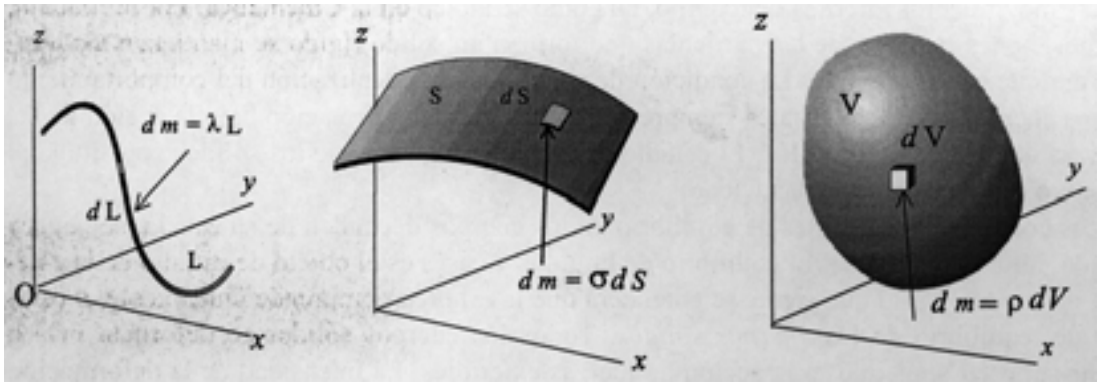


Fig. 5-1

Fig. 5-2

Fig. 5-3

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Las densidades lineal, superficial y cúbica están definidas respectivamente por las siguientes expresiones

$$\lambda = \frac{dm}{dL} \qquad \sigma = \frac{dm}{dS} \qquad \rho = \frac{dm}{dV} \tag{5-1}$$

La masa total es la suma (integral) de los diferenciales de masa asociada a cada uno de los puntos de la zona del espacio ocupado por el cuerpo, cuyo valor está dado por

$$m = \int_L \lambda\, dL \qquad m = \int_S \sigma\, dS \qquad m = \int_V \rho\, dV \tag{5-2}$$

donde los operadores $\int_L$, $\int_S$ y $\int_V$ son las integrales simple, doble y triple extendidas a todos los puntos de la línea L, la superficie S y el volumen V respectivamente. Si los cuerpos son *homogéneos*, las densidades tienen valores constantes en todos los puntos y en este caso, si m es la masa del cuerpo, las densidades están dadas por

$$\lambda = \frac{m}{L}\ \text{kg m}^{-1} \qquad \sigma = \frac{m}{S}\ \text{kg m}^{-2} \qquad \rho = \frac{m}{V}\ \text{kg m}^{-3} \tag{5-3}$$

En lo que sigue se consideraran únicamente cuerpos homogéneos lineales, superficiales o cúbicos, para los cuales sus respectivas densidades son constantes.

5.3 Concepto de fuerza

La fuerza es la magnitud física que mide la intensidad de la interacción de los cuerpos. Por el momento será suficiente dar una noción intuitiva de fuerza derivada de la experiencia diaria, la cual nos indica que la acción de una fuerza sobre un cuerpo se caracteriza por :

1) *la intensidad o módulo de la fuerza*

2) *la dirección y sentido de la fuerza*

3) *el punto de aplicación de la fuerza.*

Además de el módulo, la dirección y el sentido, que son los elementos característicos de

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

una vector, la experiencia demuestra que las fuerzas satisfacen la ley de la suma de vectores, luego la fuerza es una magnitud física vectorial y la representaremos de una manera genérica por medio del vector **F** y su módulo por *F*. La recta definida por el punto de aplicación de la fuerza y la dirección del vector **F**, se denomina *recta de acción* o *recta soporte* de la fuerza. También, la experiencia indica que la acción de una fuerza sobre un cuerpo no se modifica si está se desplaza a lo largo de su recta de soporte, lo que confiere a la fuerza el carácter de *vector deslizante*. Cuando sobre un mismo cuerpo actúan varias fuerzas, figura 5-4, el conjunto de fuerzas se denomina *sistema de fuerzas*.

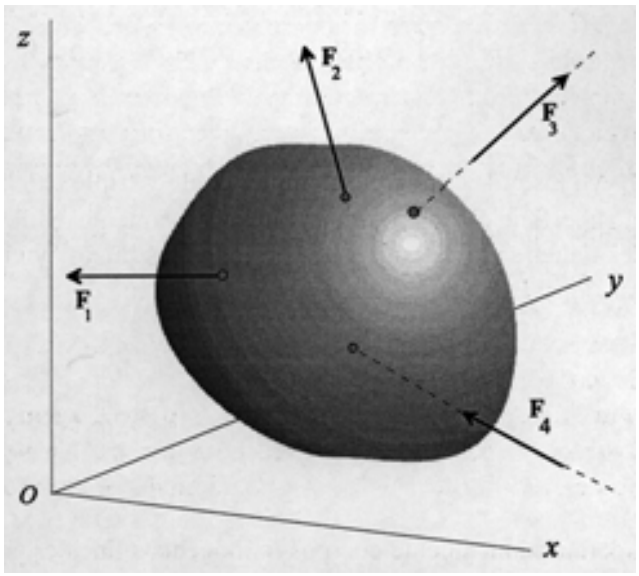


Fig. 5-4

Las fuerzas pueden ser *puntuales* o *repartidas*. Por definición, la fuerza que actúa sobre una partícula es una fuerza *puntual*. También, una fuerza aplicada en un punto determinado de un cuerpo se denomina *concentrada* o *puntual*. La noción de fuerza concentrada o fuerza puntual es convencional, ya que en la práctica es imposible aplicar una fuerza a un cuerpo en un solo punto. En realidad, cualquier fuerza puntual que consideremos, será siempre la resultante de un cierto sistema de fuerzas repartidas en una área muy pequeña del cuerpo. Las fuerzas que actúan sobre todos los puntos del volumen de un cuerpo dado, o sobre los puntos de una parte o del total de su superficie, se denominan fuerzas *repartidas*.

Para efectuar la determinación estática de la intensidad de una fuerza, se utiliza un aparato llamado *dinamómetro* que, previamente calibrado, proporciona el valor numérico de una fuerza determinada. En el SI la unidad de fuerza, es una unidad derivada, que se denomina newton (N). Una unidad práctica ampliamente utilizada en la tecnología es el *kilogramo-fuerza*, existiendo entre ambas unidades la relación 1 kg = 9,81 N.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

5.4 Leyes de Newton de la mecánica

Los principios fundamentales de la mecánica están formulados en las *tres leyes* de Newton, que describen tanto el estado de reposo o de movimiento de una partícula sometida a la acción de fuerzas debidas a la interacción con los cuerpos de su entorno, como el hecho de que las fuerzas aparecen siempre a pares. Aunque el contenido de la estática se puede formular utilizando únicamente la primera y la tercera de las leyes, se enuncian ahora el conjunto de las tres leyes, dejando para la Dinámica de la partícula el desarrollo del importante concepto de la *inercia* de los cuerpos que constituye el contenido físico de la segunda ley de Newton, así como su aplicación al cálculo de las trayectorias de las partículas en el espacio físico.

La ***Primera ley*** de Newton se refiere al estado de reposo o movimiento uniforme de una partícula, y puede ser enunciada de la siguiente manera: *si la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula es nula, ésta mantendrá su estado inicial de reposo o de movimiento uniforme.*

En su aplicación a la estática, se considera únicamente el caso en que la partícula se encuentre inicialmente en reposo en la referencia seleccionada.

La ***Segunda ley*** de Newton establece la relación que existe entre la fuerza que actúa sobre una partícula y su aceleración enunciando que: *si la resultante* **F** *de las fuerzas que actúan sobre una partícula es no nula, ésta tiene una aceleración* **a** *tal que la fuerza y la aceleración son vectores proporcionales.* La primera ley es un caso particular de la segunda que corresponde al caso en que la fuerza **F** es nula y que por tanto define el concepto de equilibrio de una partícula.

La fuerza representa la acción de un cuerpo sobre otro y puede ser ejercida, bien por *contacto* físico entre los dos cuerpos o bien a *distancia*, como por ejemplo en el caso de la fuerza atractiva que la Tierra ejerce sobre los cuerpos situados en sus proximidades. La noción intuitiva de fuerza deriva del hecho de observar que cuando un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro cuerpo, a la cual denominamos *acción*, éste a su vez ejerce sobre el primero una fuerza de sentido opuesto a la que se denomina *reacción*. La reacción es precisamente lo que proporciona contenido a la acción, ya que sin su presencia la acción deja de existir.

La ***Tercera ley*** de Newton establece la relación entre las fuerzas de acción y de reacción que se ejercen dos cuerpos en contacto, y se puede enunciar como: *las fuerzas de acción y de reacción que se ejercen entre sí dos cuerpos en contacto, tienen el mismo módulo, la misma recta de acción y sentidos opuestos.*

La ley de la igualdad de la acción y de la reacción es una de las leyes fundamentales de la mecánica. Esta ley establece que si **F** es la fuerza que un cuerpo 1 ejerce sobre un cuerpo 2, la fuerza que el 2 ejerce sobre el cuerpo 1 es igual a $-\mathbf{F}$, ambas sobre la misma recta soporte. Hay que observar que las fuerzas de acción-reacción no se cancelan entre sí ya que cada una de ellas está aplicada a un cuerpo distinto.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

5.5 Ley de la atracción universal: peso de un cuerpo

Newton extendió la ley intuitiva de la acción-reacción entre los cuerpos en contacto, a la interacción que se ejercen entre sí dos partículas de masas M y m separadas una distancia r, formulando la ***ley de la atracción universal*** que establece que: *dos partículas de masas M y m, separadas una distancia r se ejercen fuerzas atractivas del mismo módulo y de sentidos opuestos,* figura 5-5. El valor de la fuerza está dado por

$$F = G\frac{M\,m}{r^2} \qquad \text{o en forma vectorial} \qquad \mathbf{F} = -G\frac{M\,m}{r^3}\,\mathbf{r} \tag{5-4}$$

donde G es la constante de atracción universal, cuyo valor es $G = 6{,}67.10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg\,s^2}$. La recta soporte de las fuerzas atractivas entre dos partículas, es la recta definida por sus puntos posición, en los cuales está aplicada cada una de las fuerzas.

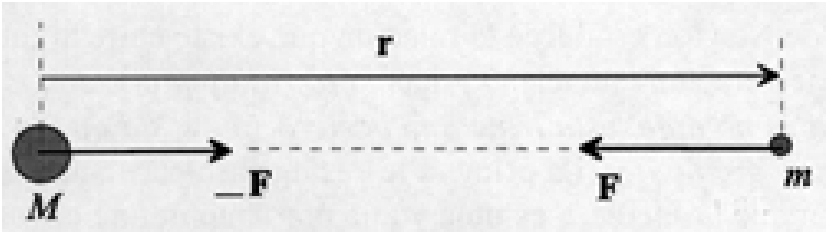


Fig. 5-5

Como veremos en la Dinámica, se puede demostrar que la ecuación (5-4) también da la fuerza que una distribución de masa con simetría esférica de radio R y masa total M ejerce sobre un cuerpo de masa m, situado a una distancia r del centro mayor que R. En consecuencia, una distribución esférica de masa se comporta, a los efectos de ejercer fuerza, como una partícula de masa M situada en el centro de la esfera. Está situación corresponde, por ejemplo, a la fuerza atractiva que la masa M de la Tierra ejerce sobre un cuerpo de masa m, situado en, o más allá de la superficie terrestre. Para estos casos, la fuerza se denomina *fuerza gravitacional* y de forma genérica, la ley también se conoce con el nombre de *ley de la gravitación*. En el segundo término de la ecuación vectorial (5-4) se designa como $\mathbf{g}$ a todos los términos excepto la masa m del cuerpo, es decir

$$\mathbf{g} = -\frac{G\,M}{r^3}\,\mathbf{r} \tag{5-5}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

La magnitud **g** es la *intensidad de la fuerza gravitacional* es decir, la fuerza que se ejerce sobre la unidad de masa m y sus unidades son (N/kg). El vector **g** está dirigido hacia el centro de la Tierra y su módulo dado por

$$g = \frac{G M}{r^2} \tag{5-6}$$

decrece con el cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. A partir de la ecuación (5-4) puede calcularse la fuerza que la Tierra ejerce sobre un cuerpo de masa m situado a una distancia r de su centro igual o mayor que el radio medio terrestre cuyo valor es $R = 6370$ km, sustituyendo M por la masa de la tierra $M = 5,97\ 10^{24}$ kg y r por el valor de su distancia al centro.

Peso de un cuerpo. Cuando la masa m está unida a un soporte, de tal manera que el conjunto se encuentra en reposo respecto de la Tierra, el cuerpo ejerce sobre el soporte la misma fuerza que la Tierra ejerce sobre él. A la fuerza que el cuerpo ejerce sobre el soporte, se le denomina *peso* del cuerpo y se le designa como **P**. La expresión del peso P de un cuerpo de masa m a la distancia r del centro de la Tierra es

$$P = mg \qquad \text{o en forma vectorial} \qquad \mathbf{P} = m\mathbf{g} \tag{5-7}$$

Para una partícula, el punto de aplicación del peso **P** es el punto del espacio en el que está situada la partícula y para un cuerpo extenso, el punto de aplicación de **P** es un punto del espacio característico de cada cuerpo que se llama *centro de gravedad* del cuerpo.

En la ecuación (5-6) haciendo $r = R$ y sustituyendo valores, se tiene el valor de g en la superficie terrestre es 9,81 N/kg. En el SI el peso de un cuerpo se mide en newtons, pero comúnmente el peso se expresa en kg, entendido ahora el kg como unidad de fuerza. Estableciendo una relación de equivalencia entre el kilo fuerza y el newton, tal que 9,81 N sean igual a un kg, de la ecuación (5-7) se deduce que la masa y el peso de un cuerpo en kg están dados por el mismo número.

El concepto de *inercia* (*masa*), se analizará en detalle en la Dinámica de la partícula, siendo suficiente por ahora decir que la masa asociada al peso de un cuerpo es un coeficiente característico de cada cuerpo que determina la intensidad de su interacción gravitacional y que se denomina *masa gravitatoria*. Para una definición operativa de masa gravitatoria se utiliza una balanza de brazos iguales soportada por su centro. Dos cuerpos tienen igual masa cuando, colocando un cuerpo en cada platillo de la balanza esta mantiene su posición horizontal, es decir, está en equilibrio. Experimentalmente se puede comprobar que el estado de equilibrio de una balanza no se modifica al trasladar la balanza de un punto a otro de la tierra,

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

luego la igualdad de masas gravitotrias de dos cuerpos es independiente del lugar en que se proceda a su determinación. A la masa gravitatoria de un cuerpo se le designa simplemente como la masa del cuerpo. En el S.I. de unidades, la unidad de masa es el kilo (kg), que corresponde a la masa de un bloque cilíndrico de platino conservado en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sevres. La masa, junto con el espacio y el tiempo forman el conjunto de magnitudes físicas fundamentales de la Mecánica. Todas las otras magnitudes físicas utilizadas en la mecánica derivan de estas tres magnitudes fundamentales, y sus unidades se expresan en función de las unidades de la masa, el espacio y el tiempo.

5.6 Centro de gravedad de sólidos

El vector **g** definido por la ecuación (5-5) mide la intensidad de la fuerza gravitacional con que la Tierra atrae a una masa puntiforme situada a una distancia r de su centro. Un sólido rígido está constituido por un conjunto continuo de infinitas "partículas" de masa dm, cada una de ellas asociada a un elemento de volumen de la distribución espacial de la masa del cuerpo. De esta manera, la fuerza que la Tierra ejerce sobre cada elemento de masa del cuerpo está dada por

$$d\mathbf{P} = \mathbf{g}\, dm \tag{5-8}$$

Para cuerpos de pequeñas dimensiones, el valor de **g** no cambia de un punto a otro del cuerpo y el conjunto de fuerzas $d\mathbf{P}$ sobre cada uno de los elementos de masa dm del sólido forma un sistema de vectores paralelos. La resultante de este sistema de fuerzas paralelas es el peso **P** cuerpo

$$\mathbf{P} = \mathbf{g} \int_{Sol} dm = m\,\mathbf{g} \tag{5-9}$$

El centro G del sistema de vectores paralelos está definido por la expresión

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\int_{Sol} \mathbf{r}\, dm}{m} \tag{5-10}$$

donde **r** es el vector posición del elemento de masa dm. El extremo del vector $\overrightarrow{OG}$ define el punto G, denominado *centro de gravedad* del sólido de coordenadas $G\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Las

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

expresiones analíticas de los correspondientes centros de gravedad en función de las densidades definidas por las ecuaciones 5-1, son:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\int_L \lambda\, \mathbf{r}\, dL}{m} \qquad \overrightarrow{OG} = \frac{\int_S \sigma\, \mathbf{r}\, dS}{m} \qquad \overrightarrow{OG} = \frac{\int_V \rho\, \mathbf{r}\, dV}{m} \tag{5-11}$$

En las figuras 5-6, 5-7 y 5-8 se muestran, en una representación gráfica, los centros de gravedad de cuerpos cuya masa está repartida sobre una línea, o sobre una superficie o sobre un volumen.

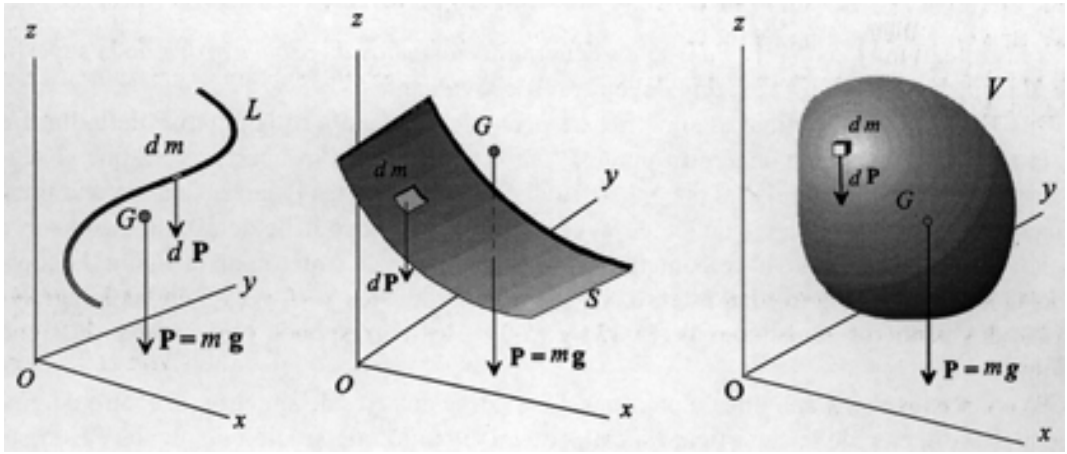


Fig. 5-6 Fig. 5-6 Fig. 5-7

En el caso mas común de sólidos uniformes, las densidades son constantes y las ecuaciones (5-11) cambian a

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\int_L \mathbf{r}\, dL}{L} \qquad \overrightarrow{OG} = \frac{\int_S \mathbf{r}\, dS}{S} \qquad \overrightarrow{OG} = \frac{\int_V \mathbf{r}\, dV}{V} \tag{5-12}$$

donde L, S y V son respectivamente la longitud, la superficie y el volumen del sólido. El centro de gravedad G definido por las ecuaciones (5-12) es un punto del espacio que puede

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

pertenecer o no al sólido rígido, independiente de la elección del sistema de referencia seleccionado para fijar la posición de los puntos del cuerpo, y ponen de manifiesto la naturaleza *geométrica* del centro de gravedad de sólidos uniformes, cuando el vector **g** es el mismo en todos los puntos del cuerpo.

Líneas y superficies planas. Para líneas y superficies planas situadas en el plano x, y, el vector posición **r** de las dos primeras ecuaciones (5-12) es $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ y las coordenadas de los centros de gravedad de estos cuerpos se obtienen de las siguientes ecuaciones

$$\bar{x}\,L = \int_L x\,dL \qquad \bar{y}\,L = \int_L y\,dL \tag{5-13}$$

$$\bar{x}\,S = \int_S x\,dS \qquad \bar{y}\,S = \int_S y\,dS \tag{5-14}$$

A las integrales $\int_S x\,dS$, $\int_S y\,dS$ se les denomina *momentos de primer orden* de la superficie S, respecto del eje y y respecto del eje x respectivamente.

Una línea o una superficie es simétrica respecto de un eje si a cada punto P de la línea o de la superficie le corresponde otro punto P' *de* la misma línea o superficie, tal que el segmento PP' sea perpendicular al eje, y este lo divida en dos partes iguales. Cuando una línea o una superficie posee un eje de simetría, el centro de gravedad debe de estar situado sobre dicho eje. En efecto, si se hace coincidir el eje y con el eje de simetría de la figura, la coordenada del centro de gravedad es cero, ya que a los productos $x\,dL$ y $x\,dS$ en las integrales de las dos primeras ecuaciones de (5-13) y (5-14), les corresponde otro igual y de signo contrario.

En consecuencia, si una línea o una superficie posee dos ejes de simetría, el centro de gravedad de la línea o de la superficie está situado en el punto intersección de dichos ejes. Esta propiedad permite determinar inmediatamente los centros de gravedad de circunferencias, perímetros rectangulares, etc, así como de círculos, elipses, superficies rectangulares o cualquier otra figura simétrica.

Una línea o una superficie es simétrica respecto de un centro O, si a cada punto P de la línea o de la superficie le corresponde otro punto P' de la misma figura tal que el punto O es el centro del segmento PP'. El centro de simetría O es el centro de gravedad de la figura ya que a cada producto $\mathbf{r}\,dL$ o $\mathbf{r}\,dS$ que aparece en las dos primeras integrales (5-12), le corresponde otro igual y de signo contrario. Cuando una figura tiene centro de simetría, no necesariamente tiene un eje de simetría; pero si una figura tiene dos ejes de simetría perpendiculares, su punto de intersección es un centro de simetría y por tanto el centro de gravedad.

Superficies arbitrarias. Cuando se trata de determinar el centro de gravedad de una superficie arbitraria, está puede dividirse en triángulos, rectángulos u otras formas usuales. Si la figura tiene un agujero, su área se cuenta negativa, figura 5-8.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

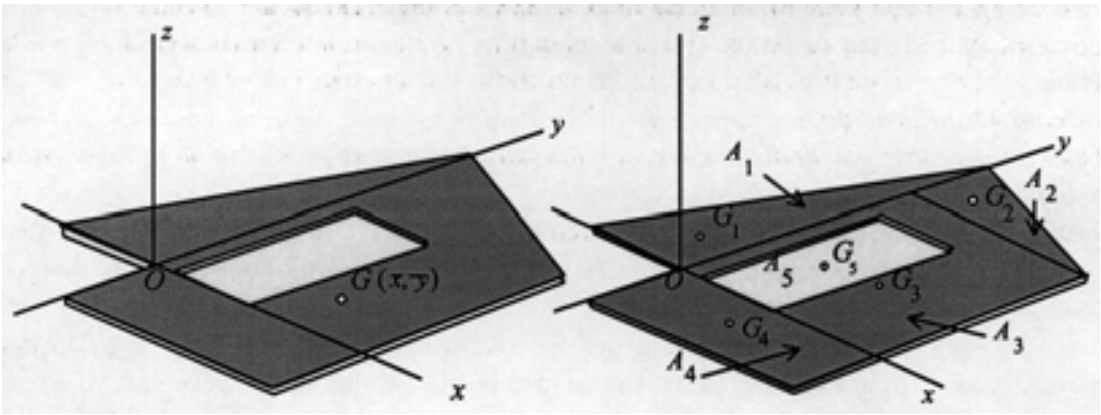


Fig. 5-8

Las coordenadas de los centros de gravedad de cada una de las figuras en las que se ha descompuesto la superficie original, tienen signo positivo o negativo en la referencia elegida. El centro de gravedad de la figura compuesta se obtiene determinando el centro de gravedad de n partículas correspondientes a las n divisiones, cuyas posiciones son conocidas. Las ecuaciones (5-14) cambian a

$$\bar{x} \sum_i^n A_i = \sum_i^n \bar{x}_i A_i \qquad \bar{y} \sum_i^n A_i = \sum_i^n \bar{y}_i A_i \tag{5-15}$$

De una forma similar se procede para determinar el centro de gravedad de una línea compuesta, dividiendo la línea en elementos más sencillos. Cuando el perfil de la superficie cuyo centro de gravedad se quiere determinar está formado por curvas analíticas que no permiten la división según figuras conocidas, es necesario calcular las integrales de las ecuaciones (5-14) expresando el elemento de área por $dS = dx\ dy$ en el caso de coordenadas rectangulares y por $dS = r\ dr\ d\theta$ en coordenadas polares, con lo cual estas son integrales dobles. Sin embargo, en muchos casos es posible determinar las coordenadas del centro de gravedad mediante una integración sencilla, lo que se consigue tomando elementos de área en cuya expresión aparezca únicamente el diferencial de una de las variables.

5.7 Teoremas de Pappus-Guldin

Los teoremas de Pappus-Guldin relacionan las superficies y los volúmenes de revolución con las coordenadas de los centros de gravedad de las líneas y superficies que los engendran. Una *superficie de revolución* es la engendrada por la rotación de una curva plana

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

respecto de un eje fijo y un *volumen de revolución* es el engendrado por la rotación de una superficie plana respecto de un eje fijo. Los ejes fijos no tienen que cortar a la línea o a la superficie.

Teorema 1º *El área de una superficie de revolución es igual al producto de la longitud de la curva generatriz por la distancia recorrida por el centro de gravedad de la línea en su movimiento al generar la superficie.*

En efecto, consideremos un elemento de arco dL de la línea L de la figura 5-9 a), la cual da una vuelta completa alrededor del eje x. Teniendo en cuenta el valor del elemento de área dA asociada al elemento de línea dL, el área de la superficie engendrada por la línea L al efectuar una rotación completa respecto del eje x está dada por $Sx = 2\pi \int_L y\, dL$. Análogamente, la superficie engendrada haciendo girar la línea L una vuelta completa respecto del eje y está dada por $S_y = 2\pi \int_L x\, dL$. Despejando las integrales y sustituyéndolas en las ecuaciones (5-13) se tiene

$$S_x = 2\pi \bar{y} L \qquad S_y = 2\pi \bar{x} L \tag{5-16}$$

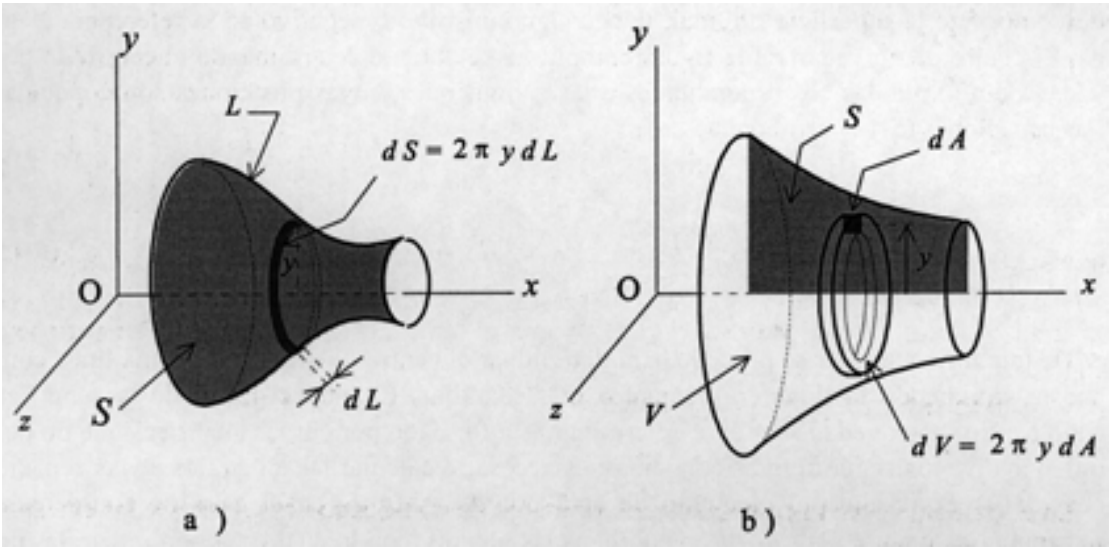


Fig. 5-9

Cuando se conocen las áreas de las superficies S_x y S_y engendradas por la rotación de la línea L en torno al eje x y al eje y respectivamente, las ecuaciones (5-16) proporcionan las coordenadas del centro de gravedad de la línea L.

Teorema 2º. *El volumen de un cuerpo de revolución es igual al producto del área de la superficie generatriz multiplicada por la distancia recorrida por el centro de gravedad del área en su movimiento al generar el volumen.*

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

En efecto, consideremos un elemento de área dS de la superficie S de la figura 5-9 b), la cual da una vuelta completa alrededor del eje x. Teniendo en cuenta el valor del elemento de volumen dV engendrada por dA, el volumen del cuerpo engendrado por la superficie S al efectuar una rotación completa respecto del eje x es $V_x = 2\pi \int_x y\, dA$. De una manera análoga, el volumen engendrado por la rotación completa de la superficie S respecto del eje y es $V_x = 2\pi \int_y x\, dA$. Despejando las integrales y sustituyéndolas en las ecuaciones (5-14) se tiene

$$V_x = 2\,\pi\,\bar{y}\,S \qquad V_y = 2\,\pi\,\bar{x}\,S \tag{5-17}$$

Cuando se conocen los volúmenes de revolución V_x y V_y engendrados por la superficie S al girar en torno al eje x y en torno al eje y respectivamente, las ecuaciones (5-17) proporcionan las coordenadas del centro de gravedad de la superficie S.

Cuando no es posible utilizar el 2° teorema de Pappus-Guldin para determinar el centro de gravedad de un volumen limitado por superficies analíticas, éste debe de ser calculado por medio de las ecuaciones

$$\bar{x}\,V = \int_V x\,dV \qquad \bar{y}\,V = \int_V y\,dV \qquad \bar{z}\,V = \int_V z\,dV$$

donde el elemento de volumen está dado por $dV = dx\,dy\,dz$ y las integrales son triples. Sin embargo, es posible simplificar el cálculo de las integrales si la geometría del volumen permite su partición en volúmenes diferenciales extensos dV_{el} de tal manera que las coordenadas de su centro de gravedad sean conocidas. Se obtienen las coordenadas del centro de gravedad del volumen por las ecuaciones

$$\bar{x}\,V = \int_V \bar{x}_{el}\,dV_{el} \qquad \bar{y}\,V = \int_V \bar{y}_{el}\,dV_{el} \qquad \bar{z}\,V = \int_V \bar{z}_{el}\,dV_{el}$$

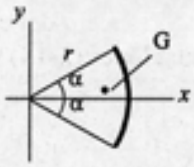
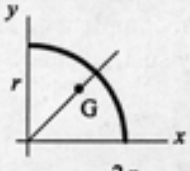
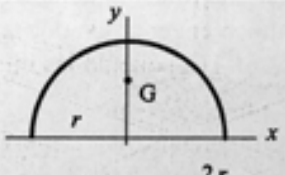
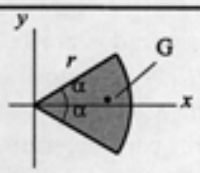
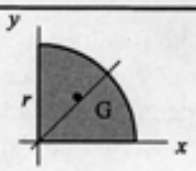
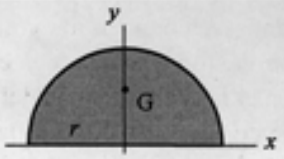
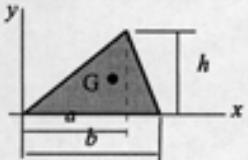
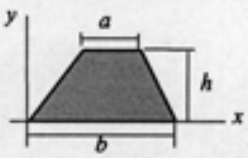
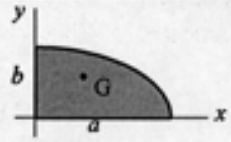
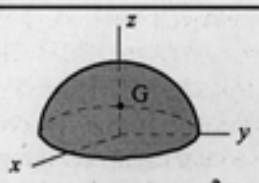
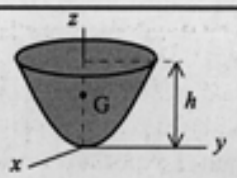
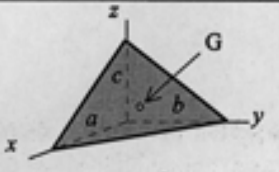
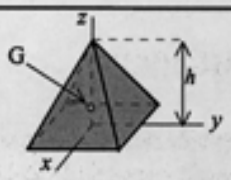
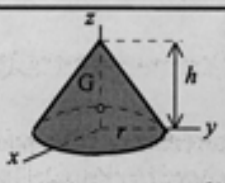
Con este procedimiento se consigue reducir las integrales triples a integrales dobles o sencillas.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Tabla 5-1 Centros de gravedad de cuerpos

Líneas	Arco de circunferencia	Cuadrante de circunferencia	Semicircunferencia
	 $x = r \operatorname{sen}\alpha$	 $x = y = \frac{2r}{\pi}$	 $x = 0 \;;\; y = \frac{2r}{\pi}$
Superficies	Sector circular	Cuarto de círculo	Semicírculo
	 $x = \frac{2}{3}\frac{r \operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$	 $x = y = \frac{4r}{3\pi}$	 $x = 0 \;;\; y = \frac{4r}{3\pi}$
	Sup. triangular	Sup. trapezoidal	Sup. de cuarto de elipse
	 $x = \frac{a+b}{3} \quad y = \frac{h}{3}$	 $y = \frac{1}{3}\frac{2a+b}{a+b}h$	 $x = \frac{4a}{3\pi} \quad y = \frac{4b}{3\pi}$
Volúmenes	Vol. de semiesfera	Vol. de semielipse	Vol. de paraboloide
	 $x = y = 0 \quad z = \frac{3r}{8}$	$x = 0 \quad y = \frac{3a}{8} \quad z = 0$	 $x = 0 \quad y = 0 \quad z = \frac{2h}{3}$
	Vol. de tetraedro	Vol. pirameidal	Vol. de cono
	 $x = \frac{a}{4} \quad y = \frac{b}{4} \quad z = \frac{c}{4}$	 $x = y = 0 \quad z = \frac{h}{4}$	 $x = y = 0 \quad z = \frac{h}{4}$

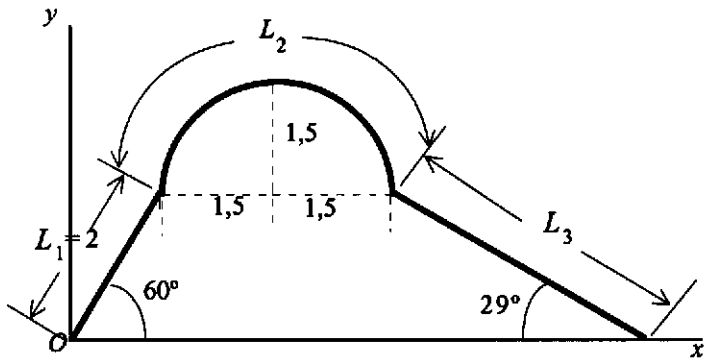
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

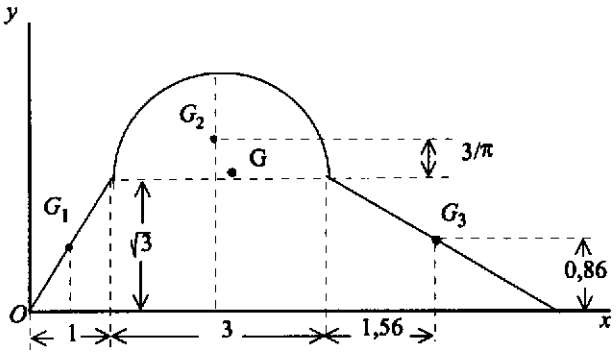
www.elsolucionario.net

PROBLEMA 5-1

Determinar las coordenadas del centro de gravedad de el alambre uniforme representado en la figura adjunta. Las cotas se dan en metros.



SOLUCIÓN



La longitud del segmento circular es $L_2 = 1{,}5\,\pi$ y la longitud de $L_3 = 3{,}57$. Las coordenadas de los centros de gravedad de cada una de las partes del alambre son :

$$G_1\,(0{,}5\,,\ \sqrt{3}/2\,) \qquad G_2\,(2{,}5\,,\ \sqrt{3} + \tfrac{3}{\pi}\,) \qquad G_3\,(5{,}56\,,\ 0{,}86\,)$$

Utilizando las ecuaciones 5-15 se tiene que las coordenadas del centro de gravedad del alambre están dadas por

$$\bar{x} = \frac{m_1\bar{x}_1 + m_2\bar{x}_2 + m_3\bar{x}_3}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad \bar{y} = \frac{m_1\bar{y}_1 + m_2\bar{y}_2 + m_3\bar{y}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

siendo $m_1 = \lambda L_1$, $m_2 = \lambda L_2$, $m_3 = \lambda L_3$ las masas de cada uno de los trozos del alambre. Sustituyendo valores se obtiene

$$\bar{x} = 2{,}75 \qquad \bar{y} = 1{,}88$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

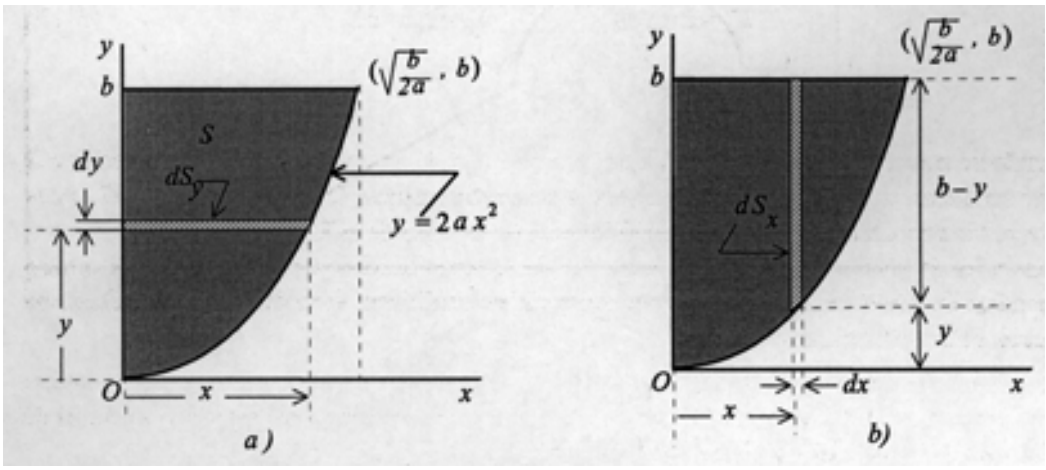
www.elsolucionario.net

PROBLEMA 5-2

Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la superficie limitada por la parábola $y = 2\,a\,x^2$ y las rectas $x = 0$, $y = b$.

SOLUCIÓN

La gráfica adjunta *a)* es la de la superficie S cuyo centro de gravedad se quiere determinar.



Se pueden utilizar las ecuaciones (5-14). De la figura *a)* se deduce que el área de la superficie está dada por la integral

$$S = \int_0^b dS_y = \int_0^b x\,dy = 4a \int_0^b x^2\,dx = \frac{4a}{3} b^3$$

Las coordenadas de G se obtienen de las ecuaciones

$$\bar{x}\,S = \int_0^{\sqrt{b/2a}} x\,dS_x \qquad \bar{y}\,S = \int_0^b y\,dS_y$$

donde el dS_x, figura b), está dado por $dS_x = (b - y)\,dx = (b - 2\,a\,x^2)\,dx$, y el dS_y está dado por $dS_y = x\,dy$. Sustituyendo los dS en las correspondientes integrales se tiene

$$\bar{x} = \frac{3}{32\,a^2 b} \qquad \bar{y} = \frac{3}{10\,a\sqrt{2\,a\,b}}$$

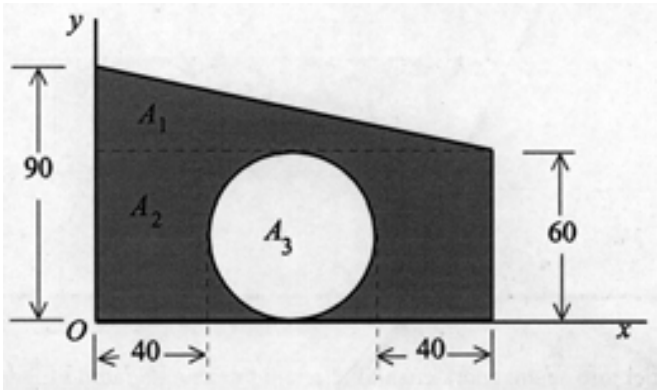
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

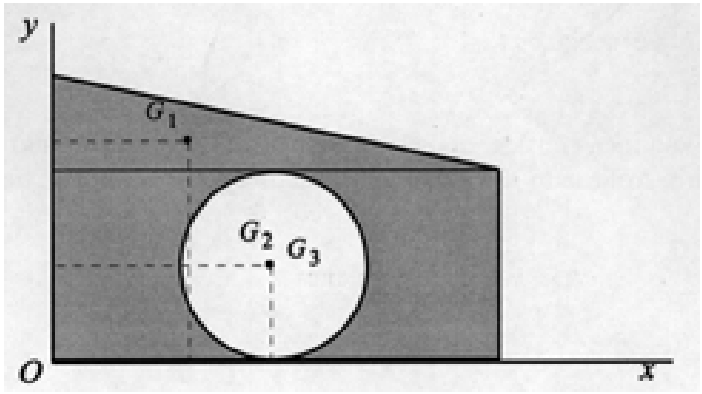
PROBLEMA 5-3

Determinar el centro de gravedad del área trapezoidal de la figura adjunta a la cual se le ha eliminado un círculo. Las cotas se dan en cm.



SOLUCIÓN

El área se compone de un triángulo más un rectángulo mas un círculo de área negativa.. Sus áreas respectivas son $A_1 = 2100$, $A_2 = 8400$ y $A_3 = -900\pi$. Las coordenadas de sus respectivos centros de gravedad son : $G_1\ (46.6, 70)$; $G_2\ (70, 30)$; $G_3\ (70, 30)$



Utilizando las ecuaciones (5-15) se tiene que las coordenadas del centro de gravedad de la placa son

$$\bar{x} = \frac{A_1\bar{x}_1 + A_2\bar{x}_2 + A_3\bar{x}_3}{A_1 + A_2 + A_3} \qquad \bar{y} = \frac{A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2 + A_3\bar{y}_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

Sustituyendo valores y operando queda

$$\bar{x} = 63,6 \text{ cm} \qquad \bar{y} = 41,0 \text{ cm}$$

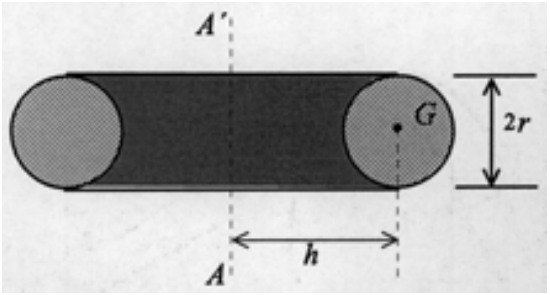
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 5-4

Utilizar los teoremas de Pappus-Guldin para determinar la superficie y el volumen de un toro circular cuya sección tiene un radio r y su radio medio es h.



SOLUCIÓN

La superficie del toro se engendra cuando la circunferencia de radio r efectúa una vuelta completa alrededor del eje $A\,A'$. El centro de gravedad de la circunferencia es su centro. Aplicando el 1° teorema de Pappus- Guldin se tiene

$$(2\pi r) \times (2\pi h) = S \qquad \Rightarrow \qquad S = 4\pi^2 h r$$

Para determinar el volumen consideremos la sección recta que es un círculo de radio r cuyo centro de gravedad es el centro. Aplicando ahora el 2° teorema de Pappus-Guldin se tiene

$$(\pi r^2) \times (2\pi h) = V \qquad \Rightarrow \qquad V = 2\pi^2 h r^2$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Capítulo 6 Fuerzas y equilibrio

6.1 Introducción

La ***estática*** es la parte de la mecánica que estudia las leyes de composición de las fuerzas y las condiciones de *equilibrio* de los cuerpos *materiales*. El concepto de equilibrio de un cuerpo está siempre referido con respecto a una referencia la cual se considera fija en el espacio. En éste sentido el equilibrio de un cuerpo es absoluto. Prácticamente se puede considerar como absoluto el equilibrio de un cuerpo respecto de la tierra o respecto de otros cuerpos rígidamente unidos a ella.

En el contesto general de la mecánica diremos que *un cuerpo está en equilibrio cuando su aceleración es cero* ($\boldsymbol{a} = 0$), es decir, cuando la fuerza que actúa sobre él es nula. La condición de equilibrio implica que el cuerpo puede estar en reposo o se mueve con velocidad uniforme respecto de una referencia fija dada. Un cuerpo se encuentra en reposo respecto de una referencia fija cuando su velocidad en dicha referencia es cero pero, puede no encontrarse en equilibrio. Por ejemplo, si se lanza un objeto verticalmente hacia arriba, este se encuentra *instantáneamente* en reposo cuando alcanza su altura máxima (posición en la que su velocidad es cero), pero no esta en equilibrio ya que su aceleración en dicha posición no es nula. Recíprocamente, un cuerpo puede estar en equilibrio y no estar en reposo. La situación más común es que un cuerpo se encuentre simultáneamente en equilibrio y en reposo, por lo que en el lenguaje corriente, ambos conceptos son sinónimos y en este sentido se considerará en todo lo que sigue la situación de equilibrio de un cuerpo.

Para que un sólido se encuentre en equilibrio bajo la acción de un sistema arbitrario de fuerzas, es necesario que el sistema cumpla las *condiciones de equilibrio*. Una condición necesaria (pero no suficiente) para el equilibrio de un cuerpo es que el sistema de fuerzas que actúan sobre él sea un *sistema equilibrado*, es decir, que la ***resultante*** del sistema sea nula. Establecer las leyes de composición de las fuerzas y la determinación de las condiciones de equilibrio constituyen los objetivos de la estática. Los problemas de la estática se pueden resolver, bien por procedimientos gráficos o bien por métodos analíticos. Se emplean ambos métodos, pero es necesario puntualizar que para resolver un problema concreto, las construcciones geométricas tienen un importante significado físico.

6.2 Principios de la estática : sólido libre

La experiencia confirma que *transportar el punto de aplicación de una fuerza de un punto a otro a lo largo de su recta soporte, no modifica la acción de la fuerza sobre el cuerpo.* Este resultado constituye el *principio de transmisibilidad* que ahora se formula como una

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

ley experimental, pero que puede ser deducido a partir de las leyes de la dinámica. La fuerza **F** aplicada en un punto de su recta de acción y la fuerza **F′ = F** aplicada a otro punto de la misma recta de acción, producen el mismo efecto sobre un cuerpo y por tanto son *mecánicamente equivalentes*.

La experiencia también muestra que la acción de dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ aplicadas en un mismo punto de un cuerpo no se modifica al ser sustituidas ambas fuerzas por una única fuerza **F** obtenida como suma vectorial de las dos fuerzas. La fuerza **F** se denomina la resultante de las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. Dicho resultado se conoce como la *regla del paralelogramo* para la suma de dos fuerzas.

Del principio de transmisibilidad y de la regla del paralelogramo se deduce que un cuerpo se puede encontrar en equilibrio bajo la acción de dos fuerzas únicamente si estas tienen, la misma recta soporte, la misma intensidad y sentidos opuestos. Las fuerzas **F** y **–F** definen el sistema de fuerzas equilibrado más simple. En consecuencia, *un sistema de fuerzas equilibrado no tiene acción alguna sobre un sólido rígido y este se encuentra en equilibrio.*

Se define el *momento de un fuerza respecto de un punto* como el producto de el módulo de la fuerza por la distancia del punto a la línea de acción de la fuerza. Dos fuerzas paralelas, iguales en módulo y de sentidos opuestos pero con diferentes líneas de acción se denominan *par de fuerzas*. La distancia entre las líneas de acción se denomina *brazo del par*. Este sistema no es un sistema equilibrado y la acción del par se mide por su *momento*, definido por el producto del módulo de las fuerzas por la distancia que las separa. Para un sistema de fuerzas el *momento resultante* respecto de un punto es la suma de los momentos de cada una de las fuerzas respecto de dicho punto.

La condición *necesaria y suficiente* de equilibrio de un sólido se establece formulando que el sistema de fuerzas que actúa sobre el sólido sea un *sistema equivalente a cero*, es decir, que la resultante del sistema y el momento resultante del sistema respecto de un punto, sean ambos nulos.

Las fuerzas que actúan sobre las partículas de un sólido rígido son de dos tipos :

1) *fuerzas exteriores*

2) *fuerzas interiores*

Las fuerzas que otros cuerpos ejercen sobre las partículas del sólido rígido considerado son las fuerzas *exteriores* y las fuerzas que las partículas del sólido rígido se ejercen entre sí, son fuerzas *interiores*. De los enunciados anteriores se deduce que, considerado un cuerpo como un sólido rígido, las fuerzas interiores forman un sistema equilibrado, y en consecuencia cuando se estudian las condiciones general de equilibrio solo es necesario tener en cuenta las fuerzas exteriores. Las fuerzas exteriores pueden dividirse en dos grupos: a) *fuerzas activas*, que son todas las fuerzas susceptibles de producir movimiento y, b) *fuerzas de reacción* asociadas a las ligaduras o vínculos del cuerpo.

Sólido libre. Por definición, un cuerpo que no está unido a otros cuerpos y que puede efectuar desplazamientos cualesquiera en el espacio, se llama *libre*. Un cuerpo no es libre

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

cuando los desplazamientos en el espacio están limitados por otros cuerpos unidos o en contacto con él. Se llama *ligadura a todo lo que limita los desplazamientos de un cuerpo en el espacio.* Un ejemplo de ligadura es el de un cuerpo en reposo sobre la superficie de una mesa. La ligadura está representada por la superficie de la mesa que le impide el desplazamiento en el sentido vertical descendente.

Cuando un cuerpo sometido a la acción de fuerzas aplicadas tiende a efectuar un desplazamiento impedido por una ligadura, el cuerpo actúa sobre la ligadura con una cierta fuerza, y por la ley de la acción-reacción, la ligadura ejerce sobre el cuerpo una fuerza de la misma intensidad y de sentido opuesto. Se llama *fuerza de ligadura,* o *fuerza de reacción* o simplemente ***reacción*** a la fuerza que la ligadura ejerce sobre el cuerpo. La reacción esta dirigida en el sentido opuesto al que la ligadura impide el desplazamiento del cuerpo.

Las fuerzas que no son de reacción se llaman *fuerzas activas*. La intensidad y la dirección de las fuerzas activas es independiente de otras fuerzas que puedan actuar sobre el cuerpo. Pero la intensidad de la reacción depende siempre de las fuerzas activas que actúan sobre el cuerpo. Si no hay ninguna fuerza activa que actúe sobre un cuerpo, la reacción es nula. Cuando la ligadura limita el desplazamiento en varias direcciones, la reacción tiene en general una dirección desconocida, la cual debe ser determinada durante el proceso de resolución del problema considerado. La determinación precisa de la dirección de las fuerzas de reacción es un elemento esencial en la resolución de problemas de estática. El efecto de la ligadura sobre un cuerpo se ejerce por medio de la fuerza de reacción.

A los efectos del estudio del equilibrio de los cuerpos se puede enunciar que: *todo cuerpo vinculado puede ser considerado como un cuerpo libre si las ligaduras se sustituyen por las correspondientes reacciones*. Las intensidades de las reacciones, en principio desconocidas, se pueden determinar mediante las condiciones de equilibrio. La sustitución de las ligaduras por sus reacciones constituye el método principal de solución de los problemas de estática. En las figuras 6-1 a), b) y c) se muestran tres casos de ligaduras, representadas por superficies, figuras a) y b) y por una articulación y un cable inextensible en el caso de la figura c).

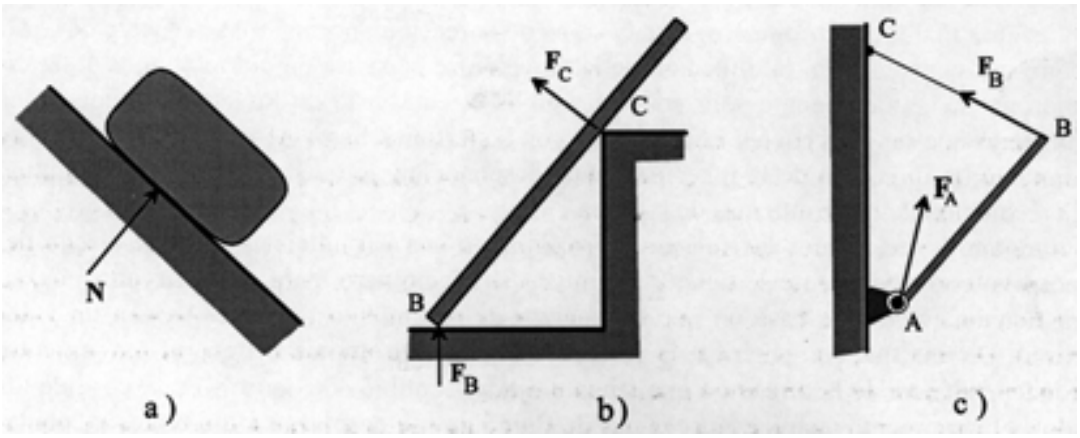


Fig.6-1

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

La superficie inclinada de la figura 6-1 a), impide el desplazamiento del sólido rígido en la dirección perpendicular y en el sentido de introducirse en ella. La reacción está representada por la fuerza **N**. En el caso de la barra de la figura 6-1 b), las reacciones $\mathbf{F}_B$ y $\mathbf{F}_C$ indican las direcciones y sentidos de los desplazamientos impedidos por la ligadura representada por la superficie indicada. La reacción $\mathbf{F}_C$ es perpendicular a la barra en el punto de apoyo. Las ligaduras de la barra de la figura 6-1 c), están representadas, en el extremo A de la barra por una articulación que impide el desplazamiento simultáneamente en las direcciones perpendicular y paralela a la superficie a la cual esta unida la articulación, y en el extremo B por un cable inextensible que impide que el extremo B de la barra modifique su distancia al punto C de unión del cable con la pared vertical. La reacción en A representada por $\mathbf{F}_A$, tiene dirección desconocida, ya que hay dos desplazamientos prohibidos y la reacción en B tiene la dirección del cable y sentido el de oponerse al aumento de la distancia. Las reacciones en los casos a) y b) tienen las direcciones indicadas, con independencia de las fuerzas que actúen sobre los cuerpos e independientemente de que estos se encuentren en reposo o en movimiento.

6.3 Fuerza de rozamiento estático

Respecto de las superficies que se han mencionado hasta ahora, se ha supuesto implícitamente que son superficies *lisas*. Las superficies lisas únicamente impiden el desplazamiento de los cuerpos en la dirección de la normal a las superficies en el punto de contacto y no son sino una idealización de la superficie real de un material, la cual siempre presenta un cierto grado de *rugosidad*. La experiencia muestra que cuando hay presentes fuerzas que tiende a desplazar un cuerpo sobre la superficie de otro, en el plano de contacto aparecen fuerzas tangenciales que se opone al desplazamiento de una superficie respecto de la otra. Dichas fuerzas se denominan *fuerzas de rozamiento*.

La aparición del rozamiento está condicionado principalmente por, la rugosidad de las superficies puestas en contacto y por el grado de adherencia entre ellas. La reacción debida a una ligadura real (con rozamiento) será la suma de la reacción normal más la fuerza de rozamiento; por consiguiente, la dirección de la reacción se separará un cierto ángulo de la dirección normal. Inicialmente solo consideraremos el equilibrio de los cuerpos vinculados suponiendo que las superficies involucradas son superficies lisas. Al incluir las fuerzas de rozamiento, la dirección de la reacción queda desconocida, lo que incrementa la dificultad de la resolución de los problemas de estática.

En algunos mecanismos las fuerzas de rozamiento son perjudiciales, y en el diseño del dispositivo correspondiente se tiene a minimizar su efecto pero, para otros mecanismos, su buen funcionamiento se basa en que las fuerzas de rozamiento presentes tengan un valor máximo. De una manera genérica, la fuerza de rozamiento impide o frena el movimiento, con independencia de la dirección que tenga o sea susceptible de adquirir. En el caso de los fluídos, el rozamiento aparece entre capas de fluido que se desplazan a diferentes velocidades, y su estudio, de una gran importancia en la ingeniería, corresponde a la mecánica de

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

fluidos. Para el caso de los sólidos rígidos en equilibrio puestos en contacto, el rozamiento se denomina *rozamiento seco o rozamiento de Coulomb*, y las fuerzas que aparecen entre los sólidos se denominan *fuerzas de rozamiento estático*.

La fuerza de rozamiento estático aparece al formular las condiciones de equilibrio para un sólido que se encuentra en reposo sobre otro cuerpo, cuando está sometido a la acción de fuerzas externas no compensadas. Dicha fuerza se ejerce de tal manera que se opone a la tendencia de las superficies en contacto a deslizar una respecto de la otra. Así, sin el rozamiento no sería posible caminar, ni desplazarnos sobre ruedas, ni poder hacer uso de los objetos e instrumentos habituales, ni la transmisión del movimiento en las máquinas mediante la acción de cables o poleas.

Cuando las superficies en contacto están en movimiento relativo una respecto de la otra, el rozamiento se denomina *rozamiento cinético* el cual, en general, es un inconveniente ya que, por una parte tiene lugar un desgaste de los materiales en contacto y de otra, la necesidad de consumir energía para compensar la pérdida debida al rozamiento y mantener el sistema en condiciones estacionarias de funcionamiento. Sin embargo, en ciertos casos el rozamiento cinético es de gran utilidad, como ocurre en todos los sistemas de frenado.

Como ya se ha indicado, la aparición del rozamiento estático está condicionado sobre todo por la *rugosidad* de las superficies en contacto y por el grado de *adherencia* presente entre los cuerpos presionados el uno contra el otro. A escala microscópica, una superficie con el mayor grado de pulimentación posible no es una superficie plana, sino que presenta una cierta rugosidad. Al colocar dos cuerpos en contacto, debido a la rugosidad de sus superficies, el área real de contacto entre ellos se establece entre las prominencias de las superficies de ambos cuerpos la cual es mucho menor que el área de la superficie macroscópica de apoyo. En dichas *microzonas* de apoyo, la presión tienen valores muy grandes y como resultado de la cual, las fuerzas entre las moléculas de las caras opuestas son muy intensas, generando un fenómeno de adherencia superficial, figura 6-2. En condiciones límites de pulimentación, de eliminación de impurezas y sin capa de aire entre dos superficies de un mismo material puestas en contacto, ambas partes del material quedan firmemente unidas entre sí.

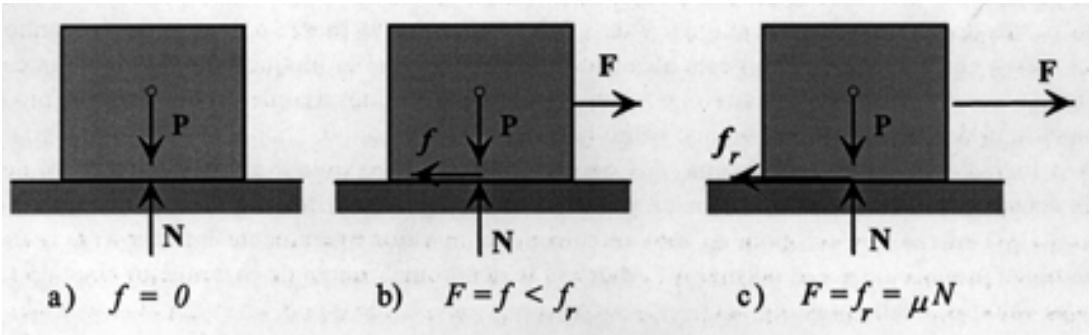


Fig. 6-2

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

El estudio de todas las particularidades del fenómeno del rozamiento estático sigue siendo un problema físico-químico muy complicado, por tanto no es de extrañar que no exista un tratamiento teórico riguroso y que los cálculos prácticos se basan en una serie de leyes generales, que aunque han sido establecidas experimentalmente, reflejan con suficiente precisión las principales características del rozamiento estático. Estas leyes pueden ser enunciadas de la siguiente manera :

1. *Cuando se tiende a desplazar un cuerpo sobre la superficie de otro, aparece en el plano de contacto de los cuerpos una fuerza de rozamiento f cuyo valor está comprendida entre cero y un valor máximo* f_r .

2. *El valor máximo de la fuerza de rozamiento* f_r *es proporcional a la fuerza normal N de presión entre las superficies en contacto.*

3. *La fuerza de rozamiento máxima* f_r *no depende (para presiones pequeñas) del área de las superficies de contacto.*

De la primera y segunda ley del rozamiento estático se tiene que

$$f_r = \mu N \tag{6-1}$$

donde μ es el coeficiente de rozamiento estático. Es un número adimensional que depende de la naturaleza y del estado de las superficies de los cuerpos en contacto, cuyo valor puede ser determinado experimentalmente de una manera muy simple. Los materiales cuyo coeficiente de rozamiento μ se desea determinar se sitúan, tal como se ve en la figura 6-2, colocando el bloque de peso **P** de uno de los materiales sobre la superficie horizontal formada con el otro material. El apoyo impide el desplazamiento vertical del bloque, luego la reacción en el apoyo **N** cumple $\mathbf{N} = -\mathbf{P}$.

En la figura 6-2 a) la fuerza de rozamiento es cero ya que no hay ninguna fuerza aplicada al bloque que tienda a moverlo sobre la superficie de contacto. En la figura 6-2 b) se aplica una fuerza horizontal **F** tal que el bloque continua en reposo sobre la superficie horizontal; si para esta **F** aplicada, el bloque no se encuentra en la situación de movimiento inminente, la fuerza de rozamiento *f* será, igual y de sentido opuesto a la fuerza aplica **F**. Aumentando la fuerza activa, figura 6-2 c) está alcanzará un valor tal que el bloque está en condiciones de movimiento inminente cuando un nuevo incremento infinitesimal de la fuerza activa produciría el deslizamiento del bloque sobre la superficie horizontal. Dicho valor de *F* es igual a la fuerza de rozamiento máxima f_r. Conocidas la fuerza máxima y el peso del cuerpo, de la ecuación (6-1) se tiene el valor de μ .Cuando el bloque desliza sobre la superficie horizontal, la fuerza que se opone al movimiento tiene un valor ligeramente inferior a f_r y es también proporcional a la normal *N*. Ahora se le denomina, fuerza de rozamiento cinético f_c y su valor está dado por

$$f_c = \mu_c N \tag{6-2}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

donde μ_c es el *coeficiente de rozamiento cinético*, cuyo valor es ligeramente inferior al coeficiente de rozamiento estático μ.

Tabla 6.1
Valores aproximados del coeficiente de rozamiento estático

Materiales	μ	**Materiales**	μ
Metal sobre metal	0.15 – 0.60	Metal sobre cuero	0.30 – 0.60
Metal sobre madera	0.20 – 0.60	Madera sobre madera	0.25 – 0.50
Metal sobre vidrio	0.50 – 0.70	Vidrio sobre vidrio	0.90 – 1.0
Metal sobre piedra	0.30 – 0.70	Piedra sobre piedra	0.40 – 0.70

Cono de rozamiento. Consideremos ahora el caso en que la superficie plana de la figura 6-2 sobre la que se apoya el bloque de peso **P** forma un cierto ángulo con la horizontal, figura 6-3 y que la única fuerza activa es el peso. En la posición representada en la figura 6-3 a), la superficie inclinada forma con la horizontal un ángulo φ y el bloque no está en la situación de movimiento inminente.

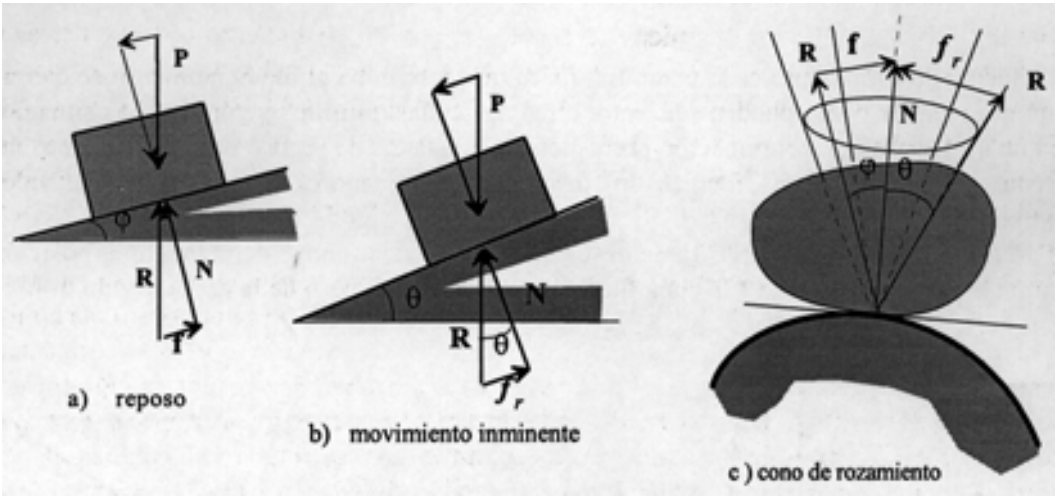


Fig. 6-3

La reacción en el apoyo **R** es igual a $-\mathbf{P}$, y se cumple que $\mathbf{P} = \mathbf{f} + \mathbf{N}$, donde $f = P \operatorname{sen} \varphi$ es la fuerza de rozamiento existente, opuesta a la componente del peso en la dirección paralela al plano inclinado que constituye la fuerza activa susceptible de producir deslizamiento, y $N = P \cos \varphi$ es la fuerza vinculante que impide el movimiento del bloque en la dirección perpendicular al plano inclinado. Al aumentar el ángulo φ, este alcanza un valor θ tal que el

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

bloque se encuentra en situación de movimiento inminente, figura 6-3 b). En está posición la fuerza de rozamiento tiene su valor máximo $f_r = P\ sen\ \theta$ y la normal es $N = P\cos\theta$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (6-1) queda que el coeficiente de rozamiento μ está dado por

$$\mu = \text{tg}\,\theta \qquad (6\text{-}3)$$

Al ángulo θ se le llama *ángulo de rozamiento estático*. El ángulo de rozamiento θ es el ángulo que forma la reacción **R** con la normal **N** en el apoyo en condiciones de movimiento inminente.

En el caso más general de contacto entre dos superficies figura 6-3 c), tal que el deslizamiento posible de una superficie sobre otra pueda tener lugar en cualquier dirección, la reacción **R** tiene una dirección arbitraria en el espacio, y en el caso de movimiento inminente, está situada sobre una *superficie cónica* de semieje θ definido por el valor del coeficiente de rozamiento $\mu = \text{tg}\ \theta$ entre ambas superficies. Dicha superficie se denomina *cono de rozamiento*. Si la resultante forma con la normal un ángulo φ menor que θ, el cuerpo se encuentra en reposo y el valor de la fuerza de rozamiento existente está dado por $f = R$ sen φ.

6.4 Rozamiento en cuñas, tornillos y correas

La fuerza de rozamiento es la magnitud física que determina el funcionamiento de ciertas máquinas simples como pueden ser, entre otras, las cuñas, tornillos y correas. Las situaciones que se describen a continuación corresponden a estados de reposo o de movimiento inminente, en las cuales las fuerzas de rozamiento son menores o iguales que su valor máximo.

Cuñas. Las cuñas son dispositivos destinados a modificar convenientemente la posición de grandes cargas aplicando a la cuña fuerzas menores que el peso de la carga, figura 6-4.

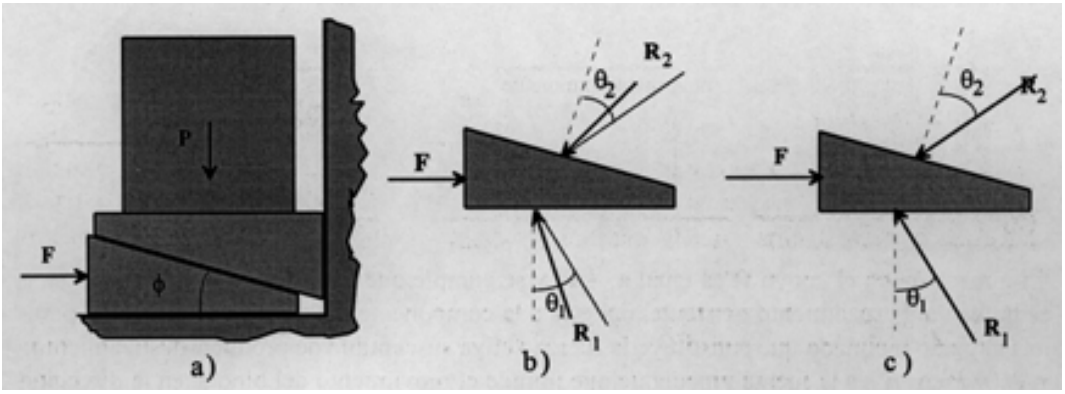


Fig. 6-4

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Una cuña es un bloque de peso despreciable que tiene dos superficies planas que forman un ángulo pequeño, destinadas en general a posicionar cargas muy pesadas. Para este fin se utilizan comúnmente por parejas, figura 6-4 a), y según sea el ángulo ϕ de la cuña, el peso a elevar puede ser mucho mayor que la fuerza **F** aplicada a la cuña. Si el bloque no está en condiciones de movimiento inminente, figura 6-4 b) las reacciones $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ forman con las correspondientes normales a las superficies de la cuña ángulos menores que los definidos por los coeficientes de rozamiento entre las superficies en contacto, $\text{tg}\,\theta_1 = \mu_1$ y $\text{tg}\,\theta_2 = \mu_2$. En la posición de movimiento inminente en sentido ascendente del bloque, las fuerzas de rozamiento tienen valores máximos y las reacciones $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ forman con las correspondientes normales los ángulos θ_1 y θ_2 , figura 6-4 c), tal que $\mathbf{F} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2$.

Tornillos. Los tornillos de rosca cuadrada son máquinas simples que proporcionan grandes fuerzas de salida con pequeños esfuerzos aplicados. Estos dispositivos se utilizan, entre otros mecanismos, en prensas, en gatos elevadores ..etc, y en todos ellos, es el rozamientos en los filetes del tornillo lo que impide que se aflojen manteniendo su posición incluso después de anular la fuerza aplicada. Consideremos el gato representado en la figura 6-5 a), el cual soporta una carga de peso **P**.

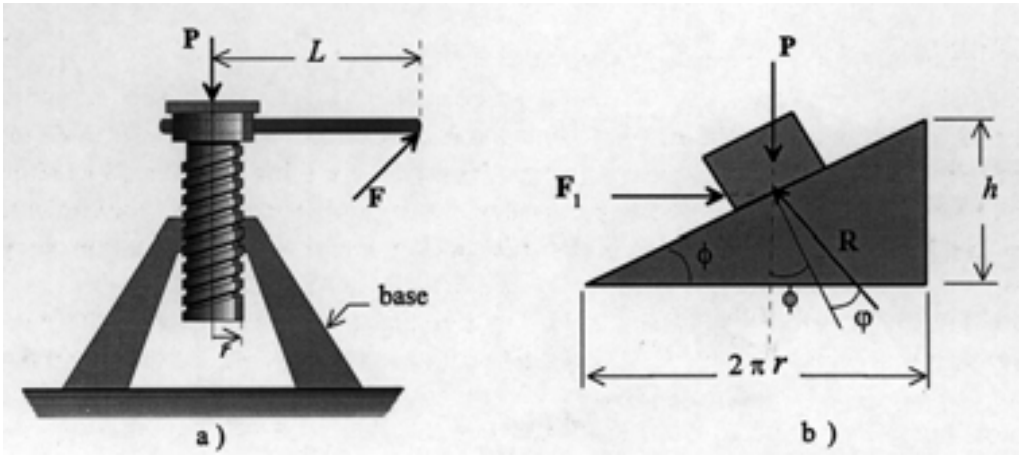


Fig. 6-5

El tornillo soporta el peso **P** y se apoya en la rosca de la base, estableciéndose el contacto entre ellos a través de una porción de la rosca. Mediante la aplicación de una fuerza horizontal **F** en el extremo del mango del tornillo y perpendicular a él, se consigue mantener la carga **P** en equilibrio. El tornillo trabaja utilizando el rozamiento entre la superficie de los filetes del tornillo con la superficie de la rosca de la base.

Se puede considerar el tornillo como un bloque de peso **P** en equilibrio, apoyado sobre la superficie inclinada de la rosca de la base, figura 6-5 b). Sobre el bloque, situado en el plano inclinado actuarán, además de su peso **P**, la resultante **R**, que forma con la normal al plano

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

inclinado un ángulo φ menor que el de rozamiento, y una fuerza horizontal $\mathbf{F}_1$ cuyo momento respecto del eje del tornillo equilibra al de la fuerza **F** aplicada a una distancia *L* del eje en el extremo del mango del tornillo. Si *h* y *r* son el paso de rosca y el radio medio del tornillo, a una vuelta completa le corresponde la longitud lineal $2\pi r$ y un desplazamiento vertical *h*, luego el ángulo del plano inclinado equivalente a la superficie de la rosca está dado por $\operatorname{tg}\phi = h/(2\pi r)$.

Determinemos el valor de la fuerza *F* aplicada en el extremo del mango del tornillo para las condiciones de movimiento inminente hacia arriba de la carga **P**. En condiciones de movimiento inminente, la componente de la reacción **R** forma con la normal al plano inclinado el ángulo θ dado por $\mu = \operatorname{tg} q$ y la fuerza de rozamiento tiene el valor máximo $f_r = \mu N$. Construyendo el triángulo de fuerzas del diagrama del sólido libre del bloque, figura 6-6 b) se deduce inmediatamente que

$$F_1 = P\ \operatorname{tg}(\phi + \theta) \quad \text{pero} \quad F_1 r = F L \quad \Rightarrow \quad F = \frac{rP}{L}\ \operatorname{tg}(\phi + \theta) \qquad (6\text{–}4)$$

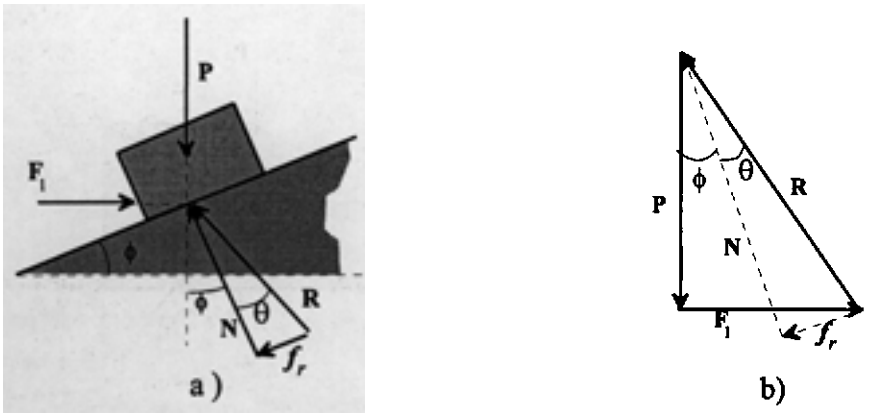


Fig. 6-6

De la ecuación (6-4) se deduce que el valor mínimo del momento *M* aplicado a la cabeza del tornillo que produce un desplazamiento ascendente de la carga está dado por

$$M = rP\ \operatorname{tg}(\phi + \theta) \qquad (6\text{-}5)$$

y su valor, para un tornillo dado, aumenta con el coeficiente de rozamiento. Disminuyendo el valor del momento aplicado *M* dado por (6-5), el tornillo tiene a descender, con lo cual la fuerza F_1 cambia de sentido y por tanto también lo hace la fuerza de rozamiento. Si el ángulo del plano inclinado es mayor que el ángulo de rozamiento, para mantener el equilibrio es necesario considerar la fuerza $\mathbf{F}_1$ tal como la representada en la figura 6-7 a).

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

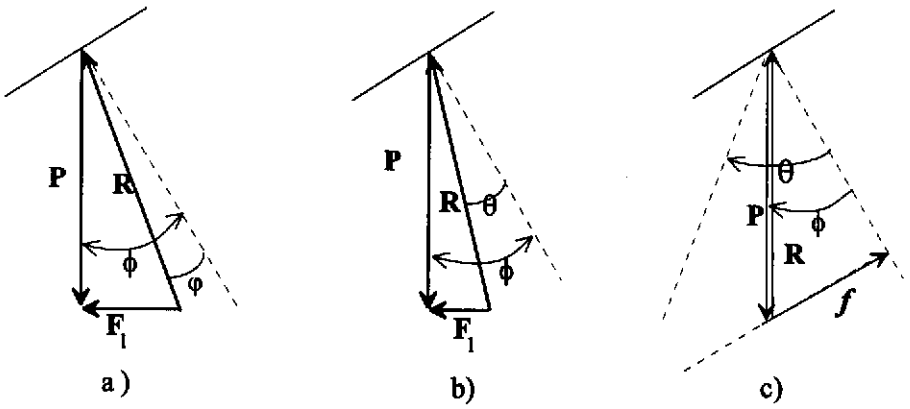


Fig. 6-7

La figura 6-7 b) corresponde al triángulo de fuerzas para la situación de movimiento inminente en sentido descendente cuando el ángulo de rozamiento es menor que el ángulo del plano inclinado, de la cual se deduce que el valor de la fuerza F aplicada al extremo del mango del tornillo en la condición de movimiento inminente descendente está dado por

$$F = \frac{rP}{L} tg(\phi - \theta) \qquad (6\text{-}6)$$

Si el ángulo del plano inclinado es *menor* que el ángulo de rozamiento, figura 6-7 c), el tornillo se mantiene en equilibrio bajo la acción de la carga **P** incluso suprimiendo la fuerza F. Esta condición recibe el nombre de *irreversibilidad del tornillo*, y constituye un criterio para el diseño de muchos tornillos.

Correas. Las correas son elementos de transmisión de esfuerzos mecánico que se utilizan en muchos de maquinaria, cuyo funcionamiento es posible debido al rozamiento entre la correa y la polea sobre la cual actúa. El par aplicado a la polea es máximo cuando la correa está en condiciones de deslizamiento inminente. Consideraremos correas planas en contacto con superficies cilíndricas tal como se representa en la figura 6-8 a).

Debido al rozamiento, las tensiones a uno y otro lado del tambor cilíndrico son distintas; supongamos que la tensión T_2 es mayor que la tensión T_1, con lo cual el movimiento inminente de la correa es hacia la derecha. El rozamiento existente a lo largo del ángulo ϕ de contacto entre la correa y el tambor ejerce sobre el tambor un par de sentido horario y el tambor ejerce sobre la correa una resistencia de sentido opuesto, que depende de la normal la cual varía de un punto a otro a lo largo de la zona de contacto. Vamos a determinar la relación entre las tensiones y dicho ángulo en situación de deslizamiento inminente, siendo μ el coeficiente de rozamiento entre la correa y el cilindro. Consideremos un elemento

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

diferencial de correa cuyos extremos sustentan el arco $d\varphi$. Las fuerzas que actúan sobre el elemento de correa se muestran en la figura 6-8 b) en donde la normal dN está dirigida en sentido radial.

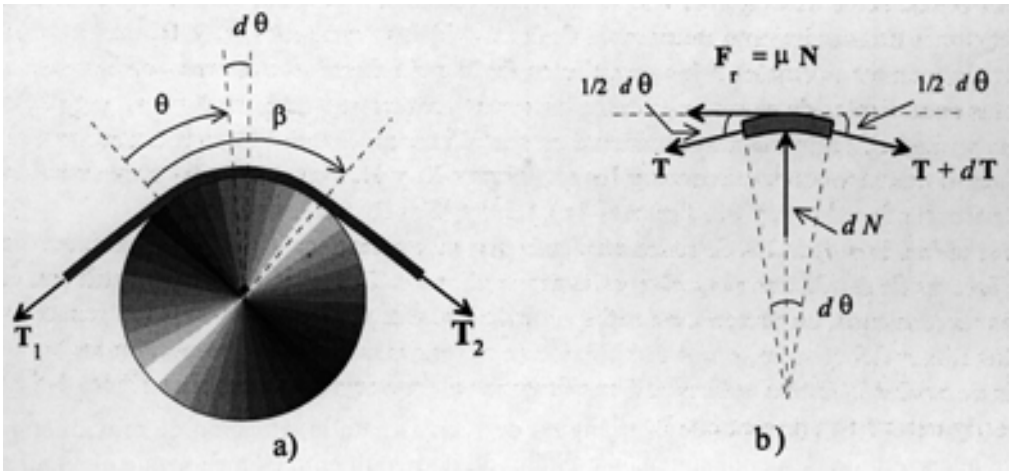


Fig. 6-8

Teniendo en cuenta que para ángulos diferenciales el coseno es igual a 1 y el seno es igual al ángulo, en condiciones de movimiento inminente la fuerza dT que tiende a producir deslizamiento de la correa sobre el tambor es igual a la fuerza de rozamiento, luego se tiene $dT = dF_r = \mu\, dN$. Pero la normal, despreciando infinitésimos de orden superior, está dada por $dN = T\, d\theta$; sustituyendo queda

$$dT = \mu\, T\, d\theta \tag{6-7}$$

Integrando (6-7) entre las tensiones en los extremos de la correa en contacto con el tambor, se obtiene la relación entre ellas y el ángulo de contacto

$$T_2 = T_1\, e^{\mu\beta} \tag{6-8}$$

En cualquiera de las posibles aplicaciones, la ecuación (6-8) sólo es utilizable en condiciones de movimiento inminente, teniendo en cuenta que T_2 es mayor que T_1 y el ángulo de contacto β se debe expresar en *radianes*, cuyo valor puede ser mayor que 2π en el caso en que se trate de una cuerda enrollada n veces a un poste cilíndrico.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Correas trapezoidales. En una gran mayoría de casos, las correas utilizadas en transmisión tienen forma trapezoidal y se denominan *correas trapezoidales.* Como se ve en la figura 6-9, el contacto entre la correa y la polea tiene lugar a lo largo de las superficies laterales de la polea, las cuales forman entre sí un ángulo α.

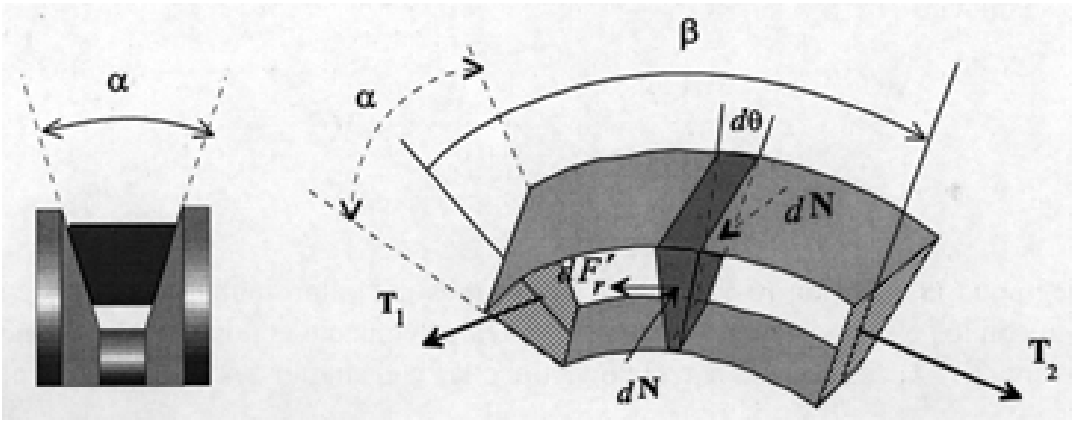


Fig.6-9

Supongamos que la tensión T_2 es mayor que la tensión T_1, y que el contacto entre la polea y la correa está definido por el ángulo β. Lo mismo que en el caso anterior, en condiciones de movimiento inminente, la fuerza dT sobre un elemento diferencial de correa $d\theta$ que tiende a producir deslizamiento de la correa sobre la polea, es igual a la fuerza de rozamiento dF_r, que ahora actúa sobre las dos caras, es decir $dT = dF_r$, figura 6-10.

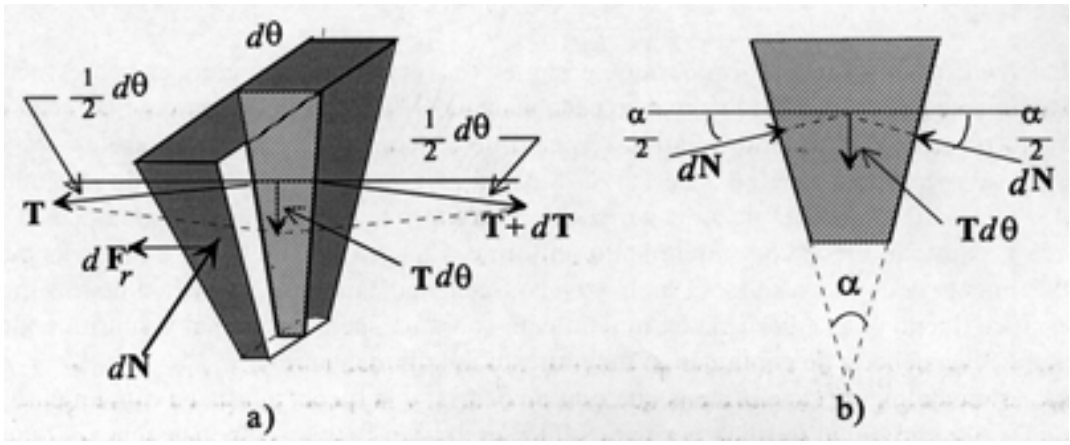


Fig. 6-10

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

De la figura 6-10 a), se deduce que la fuerza de rozamiento sobre las dos caras del elemento de correa $d\theta$ es igual a $dF_r = 2\, dF_r' = 2\,\mu\, dN$, donde dN es un fuerza dirigida según la perpendicular a las caras de la polea y sentido hacia la correa. La normal total sobre las dos caras del elemento $d\theta$, despreciando infinitésimos de orden superior, satisface la condición $2 \operatorname{sen}(\alpha/2)\, dN = T\, d\theta$. Eliminando la fuerza normal dN entre ambas ecuaciones y operando se obtiene

$$\frac{dT}{T} = \frac{\mu}{\operatorname{sen}(\alpha/2)}\, d\theta \qquad (6\text{-}9)$$

Integrando la ecuación (6-9) entre 0 y β, límites del valor del ángulo $d\theta$ que se corresponden con los extremos de la porción de correa en contacto con la polea, en donde las tensiones son T_1 y T_2, se obtiene la relación entre ellas y el ángulo de contacto dada por

$$T_2 = T_1\, e^{\left(\frac{\mu}{\operatorname{sen}(\alpha/2)}\right)\beta} = T_1\, e^{\mu_e \beta} \qquad (6\text{-}10)$$

donde el parámetro $\mu_e = \mu / \operatorname{sen}(\alpha/2)$ se puede definir como el coeficiente de rozamiento equivalente para las correas trapezoidales. Su valor es siempre mayor que el correspondiente valor de μ, por lo que las correas trapezoidales admiten mayores tensiones que las correas normales sin que se produzca deslizamiento de la correa sobre la polea.

6.5 Resistencia a la rodadura

Las ruedas son máquinas simples que permiten mover cargas muy grandes con esfuerzos relativamente pequeños debido a qué en cada instante el "punto" de contacto de la rueda con el suelo no tiene movimiento relativo respecto de él, con lo cual se eliminan las grandes fuerzas de rozamiento que aparecerían si la carga se arrastrara en contacto directo con el suelo. Ahora bien, para desplazar la carga colocada sobre la rueda hay que aplicar a esta una fuerza **F** para que ruede con movimiento uniforme. Cuando **F** es nula, no hay tendencia al deslizamiento de la rueda sobre el suelo y en consecuencia tampoco hay fuerza de rozamiento estático, luego puesta la rueda en movimiento sobre un suelo horizontal y suprimiendo la fuerza **F**, ésta debería de continuar en movimiento indefinidamente.

Experimentalmente encontramos que esto no ocurre, y la rueda, puesta en movimiento sobre un suelo horizontal termina por pararse, luego existen fuerzas de resistencia a su movimiento que no son debidas al rozamiento estático. Prescindiendo de la resistencia que ofrece

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

el aire al desplazamiento de un cuerpo en su seno, la resistencia al movimiento de la rueda sobre la superficie plana tiene su origen en dos causas distintas:

1) *el rozamiento en el eje de la rueda*

2) *la rueda y el suelo no son sólidos rígidos*

Analizamos el efecto de la primera causa. Consideremos una rueda con una carga **Q** sobre su eje que rueda hacia la derecha con velocidad constante. La resistencia debida al rozamiento con el cojinete, ejerce un par **M** de sentido antihorario figura 6-11 a), luego para mantener su movimiento se deben de añadir dos fuerzas, la fuerza **F** y la fuerza de rozamiento **f** ejercida por el suelo sobre la rueda, ya que ahora la rueda sí tiene tendencia a deslizar sobre él, tal que ambas fuerzas formen un par de momento **–M**. Si el rozamiento con el suelo es nulo, la rueda deslizaría sobre el suelo sin girar en su cojinete.

Veamos el efecto de la segunda causa, es decir, que la rueda y el suelo no son sólidos rígidos, y por tanto se deforman. Como resultado de la deformación, el contacto entre la rueda y el suelo no es un punto si no una cierta área. Consideremos que, o bien no hay rozamiento con el eje, con lo que el par **M** es nulo y las fuerzas **F** y **f** también son nulas, o que el rozamiento con el eje es despreciable, por ejemplo, una rueda que rueda libremente con velocidad constante sobre un suelo horizontal, figura 6-11 b).

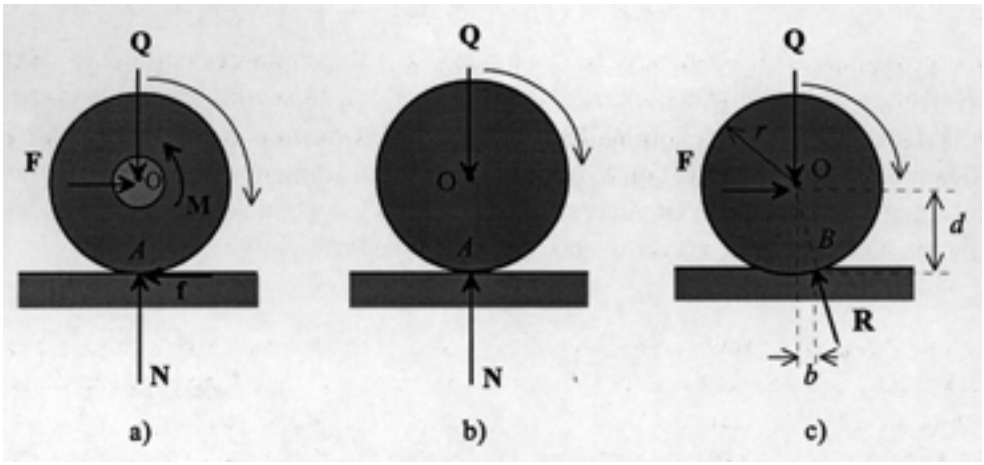


Fig. 6-11

Supongamos que su eje soporta una carga **Q**. Si el apoyo sobre el suelo fuese realmente puntiforme, la reacción **N** del suelo sobre la rueda sería igual y de sentido opuesto a la carga **Q**, y puesta a rodar, al ser nulo el sistema de fuerzas exteriores que actúan sobre ella, continuaría rodando indefinidamente, cosa que no ocurre, ya que la experiencia demuestra que el movimiento de la rueda es retardado y finalmente se para. Esto es debido a que el contacto

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

no es puntual, lo que genera una resistencia al movimiento de la rueda sobre el suelo, que se denominada *resistencia a la rodadura.* Los materiales reales se deforman al estar sometidos a las grandes presiones existentes en la pequeña zona de contacto entre la rueda y el suelo. Para simplificar, asociemos la deformación únicamente al suelo, figura 6-11 c).

Para mantener la rueda rodando con velocidad constante es necesario que la rueda en cada instante ascienda por la deformación producida en el suelo, para lo cual hay que aplicar una fuerza horizontal **F** que la suponemos dirigida hacia la derecha. La resultante **R** de la reacción en apoyo ha de cumplir que $\mathbf{Q} + \mathbf{F} = \mathbf{R}$, es decir, la componente horizontal de **R** es igual y de sentido opuesto a la **F** y la componente vertical de **R** equilibra la carga **Q**, luego la reacción **R** tiene una dirección que pasa por un punto *B*, cuyas cotas respecto del centro *O* de la rueda son las marcadas en la figura 6-11 c).

Para que el movimiento de la rueda sea uniforme, el momento de las fuerzas exteriores respecto de *B* ha de ser nulo

$$F\,d = Q\,b$$

Pero la deformación es realmente muy pequeña, lo que permite sustituir el valor *d* por el radio *r* de la rueda y queda

$$F\,r = Q\,b \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{F}{Q}\,r \tag{6-11}$$

A la distancia *b*, se le denomina *coeficiente de resistencia a la rodadura*. A diferencia del coeficiente de rozamiento estático, *b* no es un número adimensional y se mide normalmente en milímetros. Su valor es, en general, muy pequeño y depende de las propiedades mecánicas de los materiales que constituyen la rueda y el soporte.

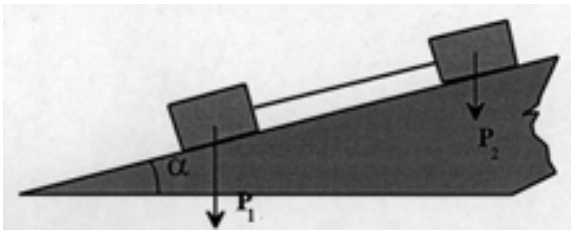
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 6-1

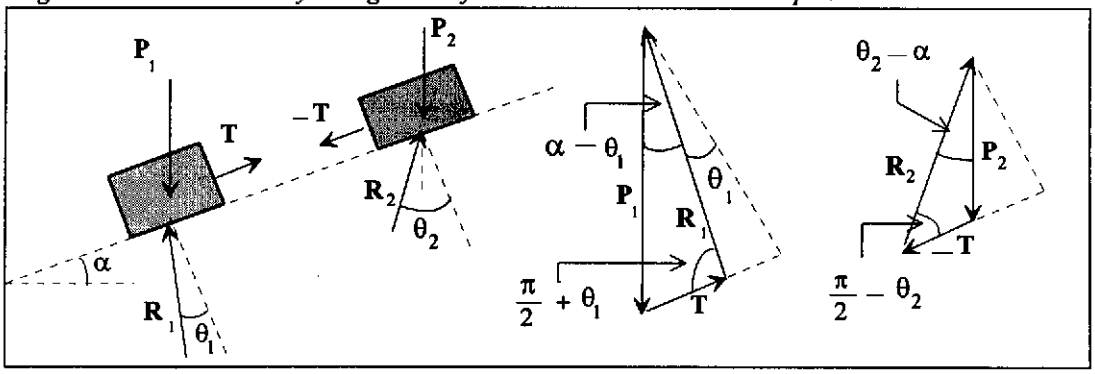
En la figura adjunta se representan dos cuerpos de pesos $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ tales que $\mathbf{P}_1 = 3\,\mathbf{P}_2$, unidos mediante un cable y colocados sobre un plano inclinado α. Los coeficientes de rozamientos respectivos entre los cuerpos y el plano son μ_1 y μ_2. Determinar el valor máximo de α para que no haya deslizamiento y la tensión de la cuerda para esta situación.



SOLUCIÓN

El movimiento posible de los bloques bajo la acción de su propio peso es el de deslizamiento sobre el plano inclinado, luego la fuerza de rozamiento es tangente al plano inclinado y dirigida hacia arriba. En condiciones de movimiento inminente, las reacciones en los apoyos forman con la normal al plano inclinado ángulos θ_1 y θ_2 cuyas tangentes son iguales a μ_1 y μ_2 respectivamente.

Diagramas del sólido libre y triángulos de fuerzas de cada uno de los bloques.



Del triángulo de fuerzas para cada uno de los bloques se tiene

$$\frac{T}{\operatorname{sen}(\alpha - \theta_1)} = \frac{P_1}{\cos\theta_1} \qquad \frac{T}{\operatorname{sen}(\theta_2 - \alpha)} = \frac{P_2}{\cos\theta_2}$$

Operando se tiene que la tensión T de la cuerda está dada por

$$T = P_1\,(\mu_1 - \operatorname{tg}\alpha)\cos\alpha \qquad \text{o} \qquad T = P_2\,(\mu_2 - \operatorname{tg}\alpha)\cos\alpha$$

Igualando ambas ecuaciones queda

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2}{P_1 + P_2} = \frac{3\mu_1 + \mu_2}{4}$$

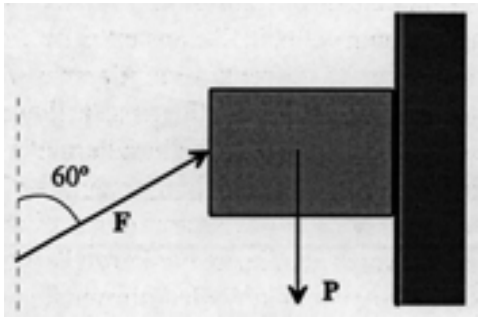
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

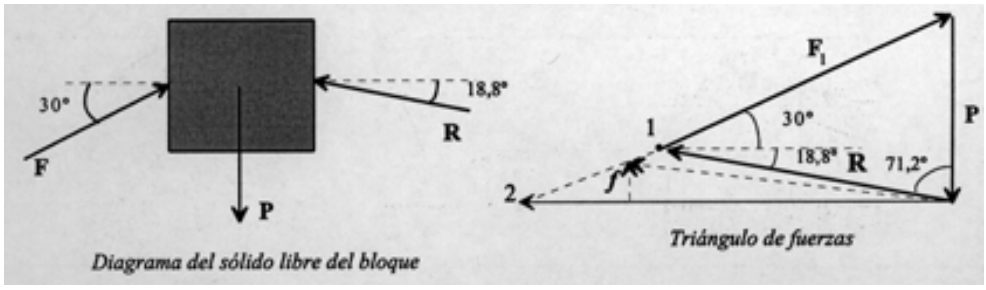
PROBLEMA 6-2

El bloque de la figura adjunta tiene un peso de 1200 kg y está apoyado en una pared vertical con un coeficiente de rozamiento de 0.34. En el punto central de la cara de la izquierda se le aplica una fuerza **F** cuya dirección forma con la vertical un ángulo de 60°. Determinar el intérvalo de valores de F para que el bloque se mantenga en equilibrio



SOLUCIÓN

El valor mínimo de la fuerza F aplicada al bloque para que este no deslice hacia abajo, es el que produce una fuerza de rozamiento máxima, para la cual, la reacción de la pared sobre el bloque forma un ángulo θ con la normal al bloque tal que $\text{tg}\,\theta = 0,34$ de donde $\theta = 18,8°$.



Del triángulo de fuerzas se tiene

$$\frac{F_1}{\text{sen } 71,2} = \frac{P}{\text{sen } 48,8} \quad \Rightarrow \quad F_1 = 1510 \text{ kg}$$

A medida que aumenta el valor de F pasando el punto origen del vector **F** de el punto 1 al punto 2, la reacción forma con la normal un ángulo menor de 18,8°, y la fuerza de rozamiento presente f es menor que la máxima. Cuando el origen del vector fuerza está en el punto 2, la reacción es normal al bloque y la fuerza de rozamiento es cero. Este es el valor máximo de F para que el bloque este en equilibrio. Del triángulo de fuerzas se tiene $F_2 = P / \text{sen } 30 = 2400$ kg . El bloque está en equilibrio para cualquier valor de F tal que

$$1510 \leq F \leq 2400$$

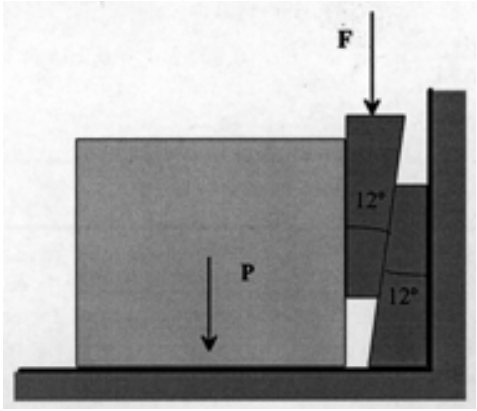
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 6-3

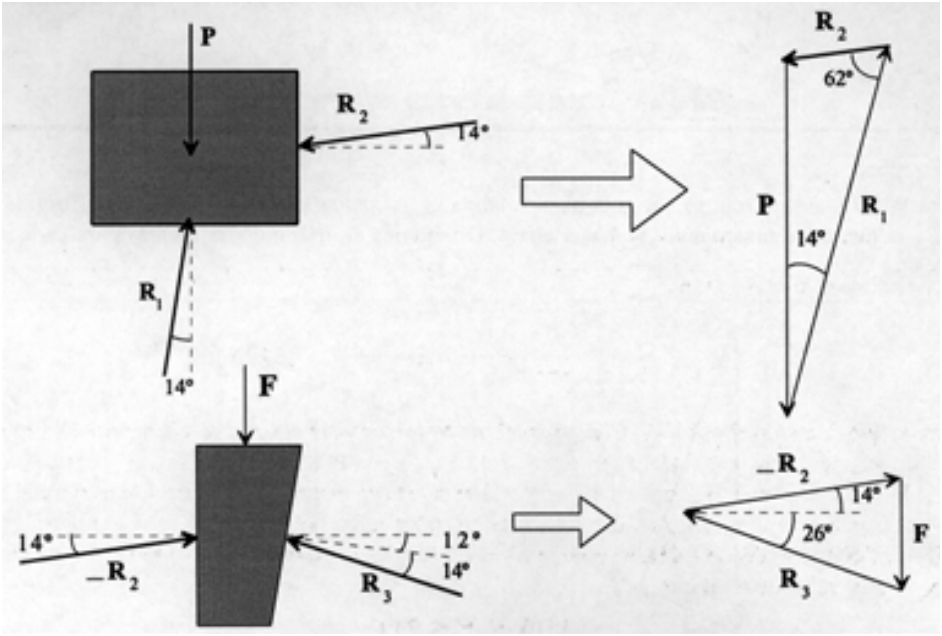
Determinar el valor mínimo de la fuerza F aplicada a la cuña de la figura adjunta, para que el bloque de peso 628 kg esté en condiciones de movimiento inminente, si el coeficiente de rozamiento entre todas las superficies es de 0, 25.



SOLUCIÓN

En condiciones de movimiento inminente, las reacciones en los apoyos forman con las normales un ángulo dado por $\text{tg}\,\theta = 0,25$ de donde $\theta = 14°$.

Diagramas del sólido libre del bloque y de la cuña en contacto con él.



© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Del triángulo de fuerzas del bloque se tiene

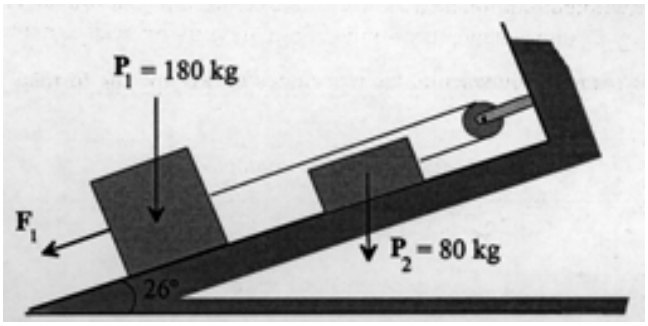
$$\frac{P}{\text{sen } 62} = \frac{R_2}{\text{sen } 14} \quad \Rightarrow \quad R_2 = 0,274\,P$$

y del de la cuña se tiene

$$\frac{F}{\text{sen}\,40} = \frac{R_2}{\text{sen}\,64} \quad \Rightarrow \quad F = 0,715\,R_2 \;= 0,196\,P = 123.0 \text{ kg}$$

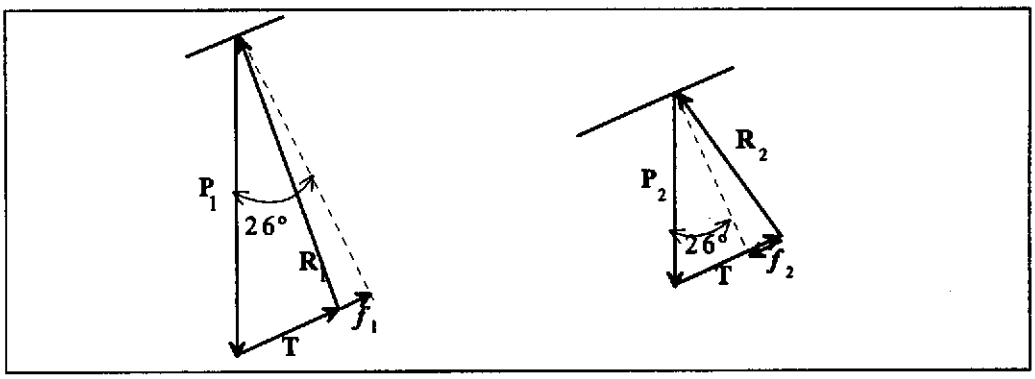
PROBLEMA 6-4

Los bloques de la figura adjunta unidos entre sí por una cuerda que pasa por una polea lisa,se encuentran en reposo sobre el plano inclinado cuando la tensión T de la cuerda es 50 kg. El coeficiente de rozamiento de ambos bloques con el plano es de 0,35. Determinar : a) la fuerza de rozamiento en cada uno de bloques ; b) la fuerza mínima $\mathbf{F}_1$ aplicada al bloque 1 paralelamente al plano inclinado para que se inicie el movimiento .



SOLUCIÓN

a) Para los bloques en reposo sobre el plano inclinado, la fuerza de rozamiento f_1 está dirigida hacia arriba y la fuerza de rozamiento f_2 hacia abajo. Dibujemos el triángulo de fuerzas para cada uno de bloques.



© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

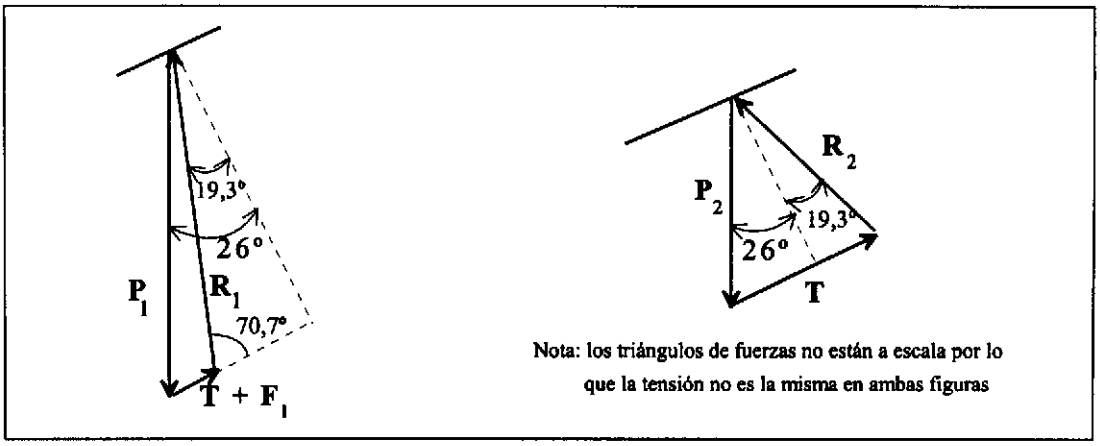
www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

De los triángulos de fuerza se obtiene inmediatamente que

$$P_1 \operatorname{sen} 26 = T + f_1 \qquad T = P_2 \operatorname{sen} 26 + f_2 \quad \Rightarrow \quad f_1 = 28,9 \text{ kg} \qquad f_2 = 15,0 \text{ kg}$$

b) Apliquemos ahora una fuerza $\mathbf{F}_1$ al bloque 1 tal que el sistema está en condiciones de movimiento inminente. Las fuerzas de rozamiento tienen valor máximo y las reacciones forman con las normales ángulos tales que $\operatorname{tg}\theta = 0,35 \Rightarrow \theta = 19,3$. La tensión T de la cuerda es desconocida. Los triángulos de fuerzas para los bloques son los dibujados en la siguiente figura.



Nota: los triángulos de fuerzas no están a escala por lo que la tensión no es la misma en ambas figuras

De los triángulos de fuerzas se deduce inmediatamente que

$$\frac{T - F_1}{\operatorname{sen} 6,7} = \frac{P_1}{\operatorname{sen} 109,3} \qquad \frac{T}{\operatorname{sen} 45,3} = \frac{P_2}{\operatorname{sen} 70,7} \quad \Rightarrow \quad T = 60,25 \text{ kg} \qquad F_1 = 38,0 \text{ kg}$$

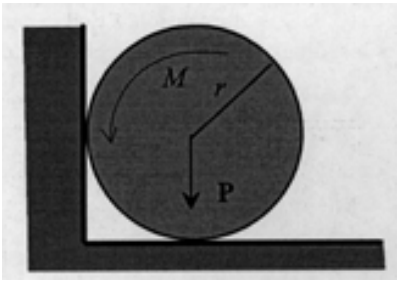
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 6-5

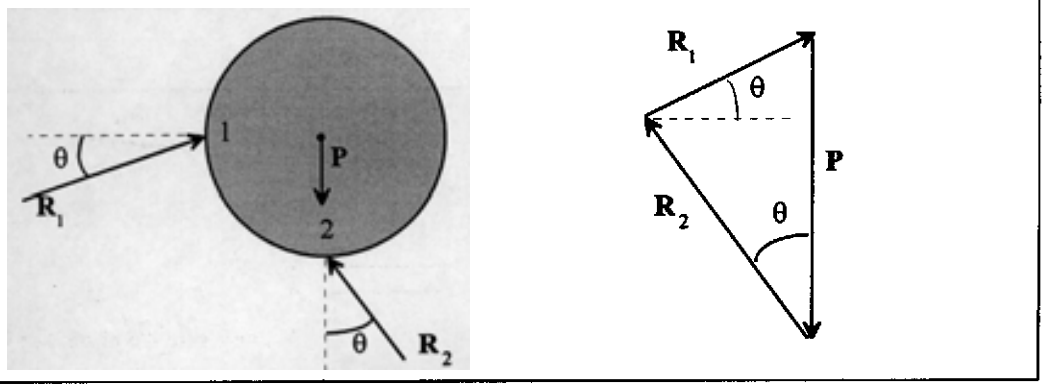
Un disco de peso **P** y radio *r* se apoya en la pared y en el suelo tal como se muestra en la figura adjunta . El coeficiente de rozamiento en las superficies de contacto es μ. Determinar el momento mínimo *M* que es necesario aplicarle para que inicie el movimiento .



SOLUCIÓN

En condiciones de movimiento inminente, las reacciones en los apoyos forman con la normal un ángulo θ tal que $\text{tg}\,\theta = \mu$. La orientación de las reacciones es la correspondiente a impedir el movimiento de los puntos de contacto.

Diagrama del sólido libre *Triángulo de fuerzas*



Del triángulo de fuerzas se deduce inmediatamente que

$$P^2 = R_1^2 + R_2^2 \qquad \text{y} \qquad R_1 = R_2 \,\text{tg}\,\theta = \mu R_2$$

de donde las reacciones están dadas por

$$R_1 = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} P \qquad R_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} P \qquad \text{(a)}$$

Para que el disco este en condiciones de movimiento inminente, el momento aplicado ha de ser igual

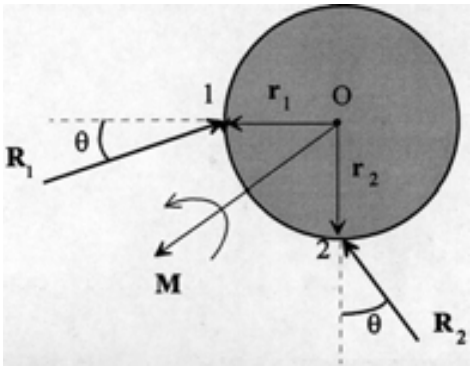
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

y de sentido opuesto al momento resistente, cuyo valor es la suma de los momentos de las reacciones respecto del centro del disco, es decir

$$\mathbf{M} = -(\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{R}_1 + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{R}_2) = \mathbf{R}_1 \wedge \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_2 \wedge \mathbf{r}_2 \qquad \text{(b)}$$



Los productos vectoriales del segundo miembro de la ecuación (b) son vectores paralelos perpendiculares al disco, luego el módulo de **M** es

$$M = R_1 r \operatorname{sen}\theta + R_2 r \operatorname{sen}\theta \qquad \text{(c)}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (a), queda

$$M = \frac{(1+\mu)\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1+\mu^2}} rP \qquad \text{(d)}$$

pero del triángulo de fuerzas se tiene $P \operatorname{sen}\theta = R_1 = \mu P / \sqrt{1+\mu^2}$. Sustituyendo el seno de θ en (d), se obtiene finalmente el valor de M

$$M = \frac{(1+\mu)\mu}{1+\mu^2} rP$$

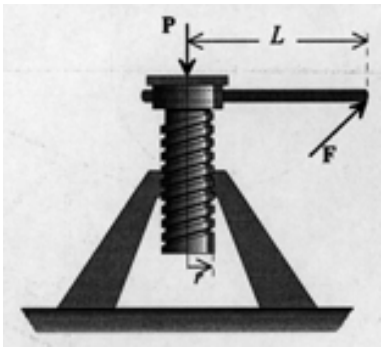
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 6-6

El gato de la figura adjunta tiene un tornillo de filite cuadrado de coeficiente de rozamiento 0, 35 y radio medio 30 mm. Determinar el máximo paso de rosca h : a) para que mantenga su posición sin aplicar ningún momento ; b) para que el momento mínimo necesario para hacer descender el gato sea 20% del momento mínimo para hacerlo subir ; c) con el paso de rosca del apartado b), determinar la fuerza F para elevar el peso $P = 3000$ N si $L = 300$ mm.



SOLUCIÓN

a) Para que el tornillo mantenga la posición sin aplicar ningún momento es necesario que el ángulo de rozamiento $\text{tg}\,\theta = \mu$ sea mayor que el ángulo del plano inclinado equivalente al tornillo definido por $h = 2\,\pi\,r\,\text{tg}\,\phi$, donde h es el paso de rosca y r el radio medio del tornillo. El mayor paso de rosca posible para que se cumpla esta condición es el corresponde a $\text{tg}\,\phi = \text{tg}\,\theta = 0{,}35$. Para los valores del problema queda

$$h = 2\pi r \text{tg}\,\theta = 66 \text{ mm}$$

b) En condiciones de movimiento mínimo ascendente o descendente cuando el ángulo de rozamiento es mayor que el ángulo de la rosca, los momentos aplicados al tornillo están dados respectivamente por

$$M_{\uparrow} = rP\,\text{tg}(\theta+\phi) \qquad M_{\downarrow} = rP\,\text{tg}(\theta-\phi)$$

El momento descendente tiene que ser el 20% del ascendente, luego $5\,\text{tg}(\theta-\phi) = \text{tg}(\phi+\theta)$ donde $\text{tg}\,\theta = 0{,}35$ de donde $\theta = 19{,}29\,°$. Resolviendo la ecuación transcendente anterior se tiene que $\text{tg}\,\phi = 0{,}217$, luego el paso de rosca del tornillo es

$$h = 2\pi r\,\text{tg}\,\phi = 41{,}0 \text{ mm}$$

c) La fuerza F aplicada al mango del tornillo para hacer subir el peso P está dada por

$$F = \frac{r\,P}{L}\,\text{tg}(\theta+\phi) \qquad \text{sustituyendo valores se tiene} \qquad F = 184{,}5\,N$$

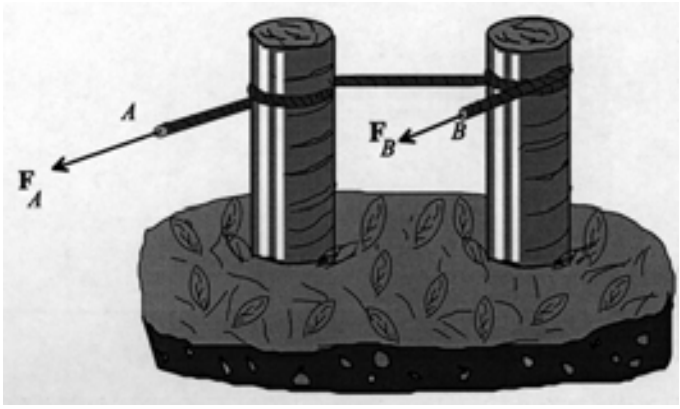
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 6-7

Una cuerda esta arrollada a dos postes tal como se indica en la figura adjunta. Una fuerza de 10 kg en su extremo B equilibra a una fuerza de 1000 kg en su extremo A. Determinar :
a) el coeficiente de rozamiento estático
b) la tensión en el tramo entre los poste

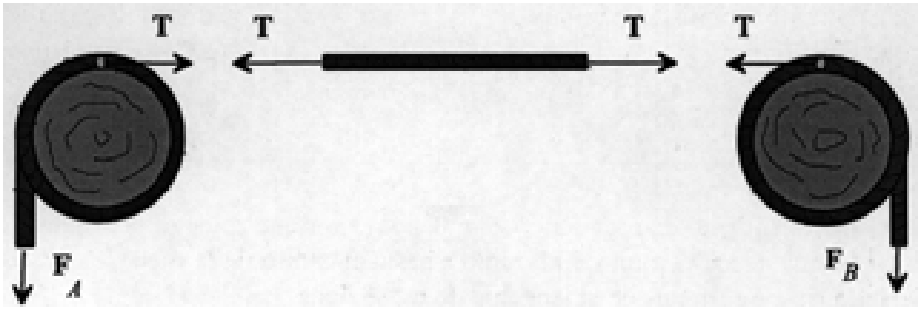


SOLUCIÓN

a) La ecuación que relaciona las tensiones en los extremos de la cuerda es $F_A = F_B e^{\mu\beta}$ donde β es el ángulo de contacto de la cuerda con los postes., cuyo valor es $\beta = 5\,\pi$. Sustituyendo valores queda $1000 = 10\, e^{5\pi\mu}$. Tomando logaritmos neperianos se obtiene

$$\mu = 0{,}2931$$

b) Consideremos la sección central de la cuerda representada en la figura adjunta.



Aplicando a cada uno de los postes la ecuación de las tensiones se tiene

$$F_A = T e^{5\pi\mu/2} \quad ; \quad T = F_B\, e^{5\pi\mu/2}$$

Sustituyendo valores y tomando logaritmos se tiene $\ln T = 4{,}605$ de donde $T = 100$ kg

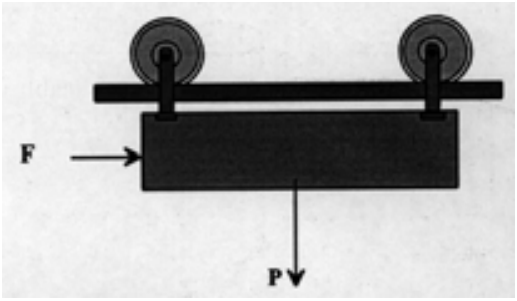
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

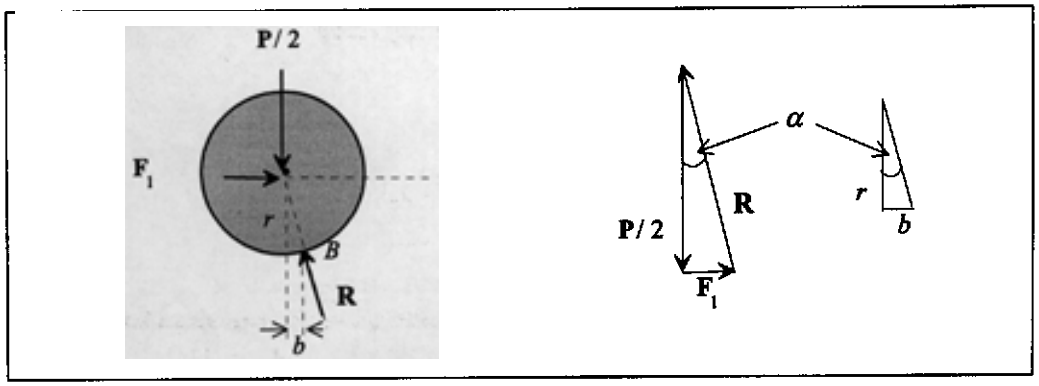
PROBLEMA 6-8

En la figura adjunta se muestra una grua aérea . El diámetro de las dos ruedas es de 80 mm y el peso de la carga es de 3000 kg. Las ruedas y la guía horizontal son de acero y el coeficiente de resistencia a la rodadura es de 0,22 mm. Determinar la fuerza horizontal necesaria para desplazar la grua .



SOLUCIÓN

La fuerza que se ejerce sobre cada uno de los ejes de las ruedas es **P/2**. En la siguiente figura se representa el diagrama del sólido libre de una de las ruedas y el triángulo de fuerzas correspondiente.



El coeficiente de rozamiento de rodadura b es mucho menor que r, luego la distancia entre el pie de la perpendicular bajada desde el punto B al radio r hasta el centro de la rueda, es prácticamente igual al radio. Igualando las expresiones de la tangente de α , se tiene

$$F_1 = \frac{b\,P}{2r} = 8{,}25 \text{ kg}$$

Como hay dos ruedas, la fuerza total para equilibrar la fuerza debida al rozamiento de la rodadura es

$$F = 2F_1 = 16{,}5 \text{ kg}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

6.6 Componentes de una fuerza

Para que una fuerza quede completamente defina es necesario dar su módulo, dirección y sentido; además, las fuerzas cumplen con la ley del paralelogramo, luego son magnitudes físicas vectoriales. La acción de una fuerza sobre un cuerpo quede especificada si se conoce el punto de aplicación de la fuerza, y según el principio de transmisibilidad, la acción no cambia al desplazar la fuerza sobre su línea soporte, es decir, los vectores representativos de las fuerzas son vectores deslizantes. De está forma, todas las operaciones y propiedades definidas definidos en el Capítulo I para los vectores deslizantes, son aplicables directamente a las fuerzas, adquiriendo dichas operaciones matemáticas contenido físico.

En la estática se considera el equilibrio de partículas y el equilibrio de sólidos rígidos. En el caso de las fuerzas que actúan sobre una partícula, sus vectores representativos tienen un punto de aplicación bien determinado, que es el punto definido por la propia partícula. Cuando sobre la partícula actúan dos fuerzas, la dirección, sentido y módulo de la resultante se determina con la regla del paralelogramo, figura 6-12.

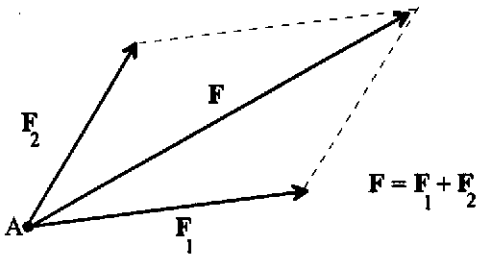


Fig.6-12

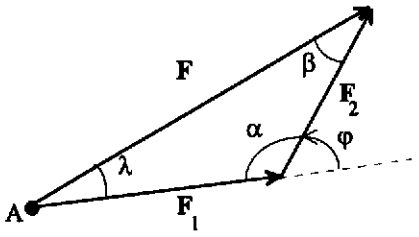


Fig. 6-13

Recíprocamente, dada una fuerza **F**, existen infinitos conjuntos de dos fuerzas que cuya suma es la fuerza **F**. El proceso de sustituir una fuerza por dos o más fuerzas, se denomina *descomponer* la fuerza **F** en *componentes*. En la figura 6-13 se representa el triángulo de fuerzas formado por las dos fuerzas y su resultante. Aplicando la ley del coseno al triángulo de fuerzas se deduce inmediatamente que el módulo de la resultante está dado por

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 F_2 \cos \varphi \qquad (6\text{-}14)$$

siendo F_1 y F_2 los módulos de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ respectivamente y φ el ángulo que forman. Aplicando la ley del seno al triángulo de fuerzas se obtiene la relación entre los módulos de las tres fuerzas

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$\frac{F}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{F_1}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{F_2}{\operatorname{sen}\lambda} \tag{6-15}$$

Las igualdades (6-15) son de gran utilidad para la resolución de problemas de equilibrio en los que intervienen tres fuerzas no paralelas. En el sistema de coordenadas cartesianas asociado a la referencia respecto de la cual se determina el equilibrio, la fuerza **F** se expresa como

$$\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{k} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z \tag{6-16}$$

donde F_x, F_y y F_z son las *componentes escalares* de la fuerza, siendo $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ y $\mathbf{F}_z$ sus componentes vectoriales. Cuando no exista posibilidad de confusión, se utilizará indistintamente el término componentes para designar tanto a las escalares como a las vectoriales. La expresión de la fuerza **F** en componentes rectangulares permiten determinar inmediatamente el módulo y los cosenos directores

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \tag{6-17}$$

$$\frac{F_x}{\cos\theta_x} = \frac{F_y}{\cos\theta_y} = \frac{F_z}{\cos\theta_z} = F \tag{6-18}$$

Sustituyendo en (6-16) las expresiones de F_x, F_y y F_z obtenidas de (6-18), se tiene

$$\mathbf{F} = F\,(\cos\theta_x\,\mathbf{i} + \cos\theta_y\,\mathbf{j} + \cos\theta_z\,\mathbf{k}) = F\,\mathbf{u}$$

donde **u** es un vector unitario con la misma dirección y sentido que **F**.

6.7 Momento de una fuerza

Momento de una fuerza respecto de un punto. Sustituyendo en la definición del momento de un vector deslizante respecto de un punto el vector por la fuerza, se tiene la definición de el momento de la fuerza respecto de un punto. Veamos el contenido físico de dicha operación. Sea **F** una fuerza que actúa sobre un cuerpo y A un punto cualquiera perteneciente a la recta soporte de **F**, figura 6-14.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

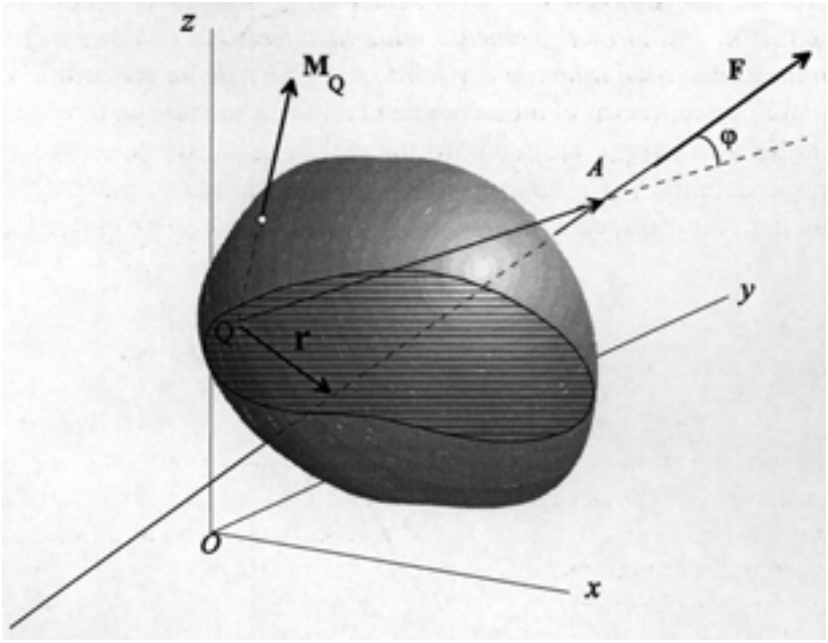


Fig. 6-14

De la definición de momento de un vector respecto de un punto se tiene que el momento de **F** respecto de un punto Q del sólido rígido, figura 6-14, es el vector $\mathbf{M}_Q$ dado por

$$\mathbf{M}_Q = \overrightarrow{QA} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} \tag{6-19}$$

donde **r** es el vector correspondiente a la perpendicular bajada de Q a la recta soporte de **F**. El módulo del momento es

$$M_Q = \overline{QA}\, F \operatorname{sen}\varphi = r\, F \tag{6-20}$$

donde r es la distancia de Q a la recta soporte de **F**. En componentes rectangulares el momento de la fuerza es

$$\mathbf{M}_Q = M_x\, \mathbf{i} + M_y\, \mathbf{j} + M_z\, \mathbf{k} \tag{6-21}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Los valores de las componentes se obtienen desarrollando el producto vectorial de la ecuación (6-19). *El módulo del momento mide la intensidad con que la fuerza* **F** *tiende a producir un movimiento de rotación del sólido alrededor de un eje definido por* $\mathbf{M}_Q$ *aplicado en Q.* En el SI de unidades, el momento de una fuerza se mide en newton metro (N.m).

Momento de una fuerza respecto de un eje. El momento de un vector deslizante respecto de un eje definido por el vector unitario **u** pasando por el punto *Q*, es la proyección del momento del vector respecto de uno de los puntos del eje sobre el eje, figura 6-15.

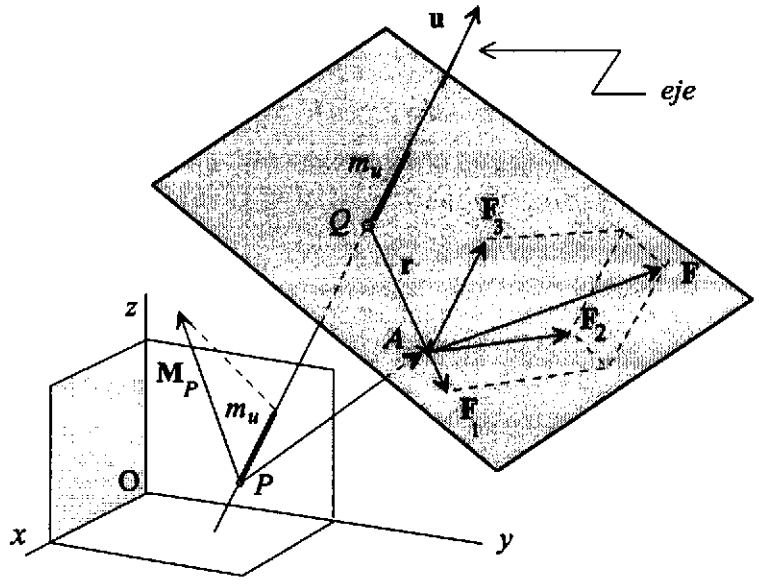


Fig. 6-15

De la definición se tiene, que si *A* es un punto de la recta soporte de **F**, el momento de la fuerza respecto del eje es

$$m_u = \mathbf{u} \cdot \mathbf{M}_P = \mathbf{u} \cdot \left(\overrightarrow{PA} \wedge \mathbf{F}\right) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{r} \wedge \mathbf{F}) = r\,F_2 \qquad (6\text{-}22)$$

El significado físico del momento de una fuerza respecto de un eje queda mejor reflejado si se descompone la fuerza en tres componentes como las indicadas en la figura 6-15. De su definición se tiene que, únicamente la componente $\mathbf{F}_2$ contenida en un plano perpendicular al eje que pasa por *A* y que sea perpendicular al vector **r** que determina la distancia del punto *A* al eje, participa en el momento de **F** respecto del eje, cuyo valor es $r\,F_2$. Se concluye

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

que ,*el momento* m_u *de* **F** *respecto del eje* **u** *pasando por Q , mide la intensidad de con que la fuerza tiende a hacer girar el sólido alrededor de dicho eje.* Conocidas las componentes de **F** en la referencia, las coordenadas de los puntos *Q* y *A,* y los cosenos directores de la dirección del eje, el producto mixto de la ecuación (6-22) proporciona directamente el valor de m_u.

6.8 Par de fuerzas

Se llama *par* al sistema formado por dos fuerzas **F** y **–F** *del mismo módulo, sentidos opuestos y cuyas rectas soportes son paralelas*, figura 6-16. El par de fuerzas es un par de vectores desalizantes cuyo momento, como se vió en el Capítulo 2, es el mismo respecto de todos los puntos del espacio, figura 6-15.

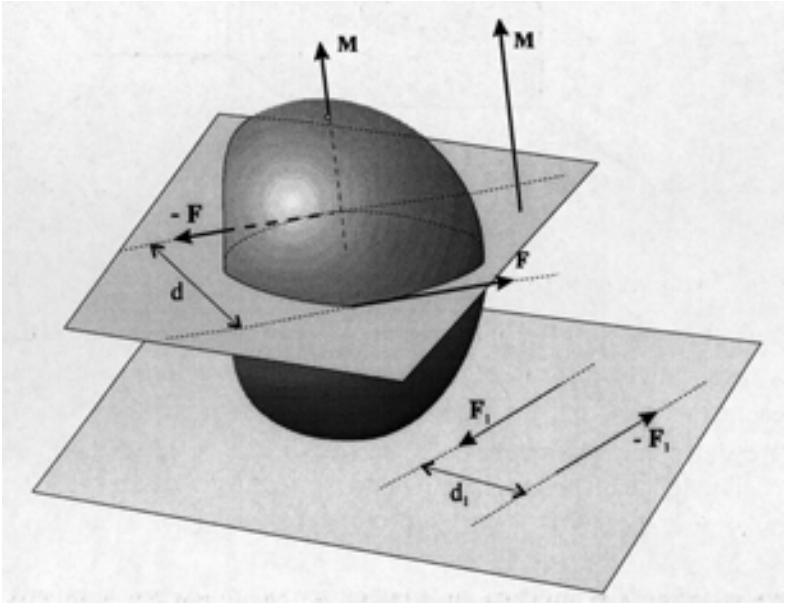


Fig. 6-16

El momento del par se expresa como $\mathbf{M} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}$, donde **r** es un vector con origen en un punto de la recta soporte de una de las fuerzas, por ejemplo **F'** y extremo un punto de la recta soporte de **F**. El vector **M** es perpendicular al plano defino por las dos rectas soporte y su sentido está defino por el producto vectorial. Si *d* es la distancia entre las dos rectas, el módulo del momento es $M = dF$.

El momento de un par se representa mediante un vector *libre* $\mathbf{M} = M_x\,\mathbf{i} + M_y\,\mathbf{j} + M_z\,\mathbf{k}$ que caracteriza completamente la acción de las fuerzas del par, y en consecuencia cuando un par actúa sobre un sólido rígido, carece de importancia los puntos de aplicación de las dos fuerzas que forman el par, así como cual sea su módulo y dirección.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

El momento $\mathbf{M}_1$ de cualquier otro par de fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_1$ separadas una distancia d_1, coplanarias con $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ o bien situadas en un plano paralelo al de estas, es igual a $\mathbf{M}$ cuando se cumple que $F_1 d_1 = F d$ y el producto vectorial $\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_1$ tiene el mismo sentido que el producto vectorial $\mathbf{r} \wedge \mathbf{F}$. Obviamente hay infinitos pares que tienen el mismo momento. Los pares que tienen el mismo momento son sistemas equivalentes ya que tienen la misma resultante y el mismo momento resultante, luego son también *mecánicamente equivalentes*, figura 6-17

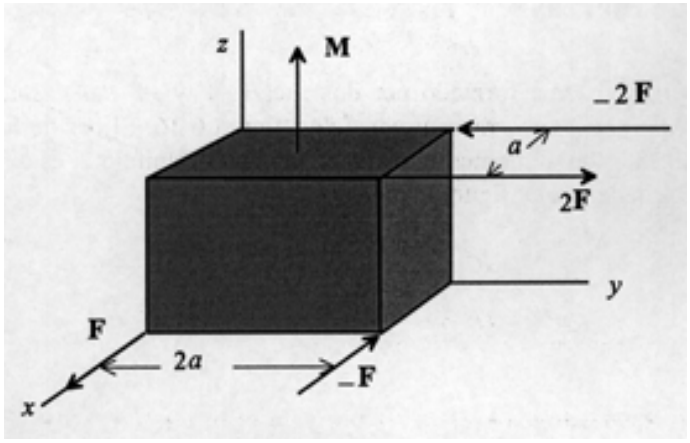


Fig. 6-17

Veamos que el momento $\mathbf{M}$ es una magnitud vectorial, es decir que satisface la ley de la suma de vectores. En efecto, sean $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ los momentos de dos pares de fuerzas $\mathbf{F}_1$, $-\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, $-\mathbf{F}_2$ tales que los planos π_1 y π_2 que los contienen se cortan bajo un cierto ángulo. Seleccionando pares tales que los orígenes comunes de $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y de $-\mathbf{F}_1$, $-\mathbf{F}_2$ sean puntos de la recta intersección de los planos π_1 y π_2, fácilmente se puede ver que el sistema formado por los dos pares es otro par $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ y $-\mathbf{F} = -\mathbf{F}_1 + (-\mathbf{F}_2)$ cuyo momento $\mathbf{M}$ es la suma de los momentos $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$.

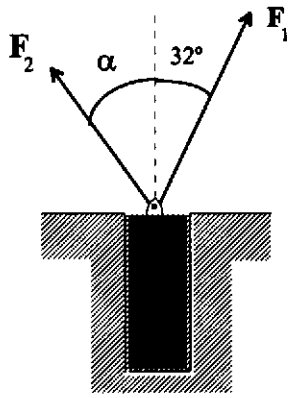
Una fuerza cualquiera $\mathbf{F}$ aplicada en A puede ser sustituida por la misma fuerza aplicada en otro punto B del sólido mas un par, cuyo momento sea igual al momento de $\mathbf{F}$ respecto de B y tal que los vectores del par sean $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}$. En efecto, ambos sistemas son equivalentes ya que tienen la misma resultante y el mismo momento resultante respecto de un punto.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

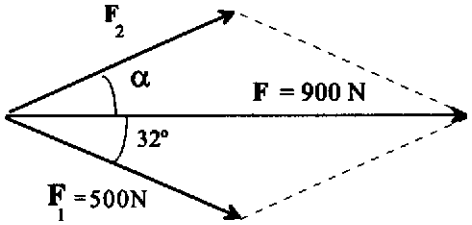
PROBLEMA 6-9

Se desea elevar el bloque de la figura adjunta mediante una fuerza vertical **F** de 900 N. Determinar el módulo y dirección de la fuerza $\mathbf{F}_2$ sabiendo que $F_1 = 500$ N.



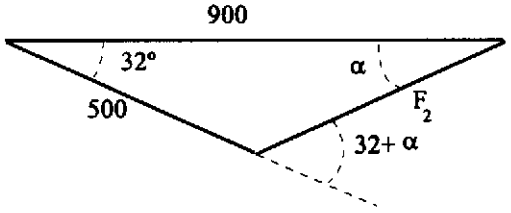
SOLUCIÓN

Solución gráfica. Construyendo a escala las fuerzas y utilizando la ley del paralelogramo se obtiene midiendo sobre el dibujo



$$F_2 = 544.8 \text{ N} \quad \text{y} \quad \alpha = 29.1°$$

Solución trigonométrica. Se construye el triángulo formado por las tres fuerzas



www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Aplicando el teorema del seno, se tiene

$$\frac{F_2}{\text{sen}\,32} = \frac{500}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{900}{\text{sen}\,(32+\alpha)}$$

Operando en la segunda igualdad se obtiene ,

$$\tan\alpha = \frac{\text{sen}\,32}{1,8 - \cos 32}$$

ecuación que proporciona el valor del ángulo $\alpha = 2\,9.1°$. Conocido el valor del ángulo, de la primera igualdad se determina el valor de la fuerza $F_2 = 544.8$ N.

Solución analítica. Tomando un sistema de coordenadas con origen en el punto de unión de las fuerzas y el eje *y* en la dirección vertical , las componentes de $\mathbf{F}_1$ y de $\mathbf{F}_2$ según los ejes satisfacen las ecuaciones

$$500\,\text{sen}\,32 - F_2\,\text{sen}\,\alpha = 0$$

$$500\,\cos 32 + F_2\,\cos\alpha = 900$$

que forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuya solución es

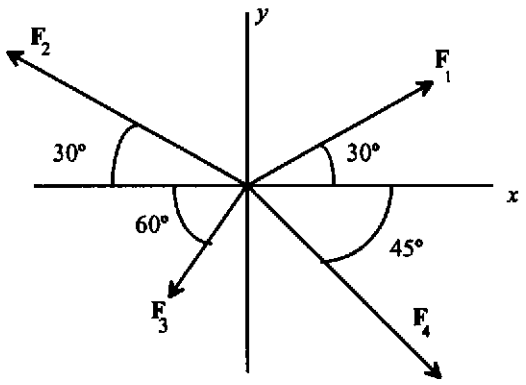
$$F_2 = 544.8\ \text{N} \quad \text{y} \quad \alpha = 2\,9{,}1°$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

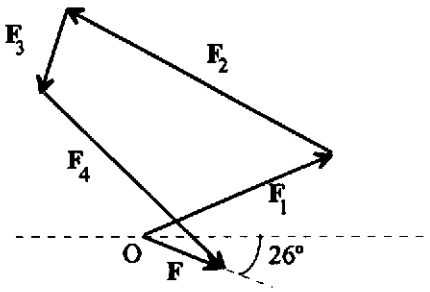
PROBLEMA 6-10

Determinar la resultante del sistema de fuerzas concurrentes que se indica en la figura adjunta., sabiendo que $F_1 = 150$ N, $F_2 = 200$ N, $F_3 = 80$ N y $F_4 = 180$ N.



SOLUCIÓN

Gráfica. A partir del origen O, se dibujan a escala uno a continuación de otro. Uniendo el origen del primero con el final del último se obtiene la resultante. Midiendo la resultante se obtiene $F = 49$ N formando un ángulo de – 26° con la horizontal



Analítica. Se determinan las componentes según x y según y de cada una de las fuerzas. A partir de estos valores se obtiene la resultante y el ángulo que forma con el eje x. Las componentes de las fuerzas son

$$\mathbf{F}_1 = 129.9\,\mathbf{i} + 75.0\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}_2 = -173.2\,\mathbf{i} + 100.0\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}_3 = -40.0\,\mathbf{i} - 69.2\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}_4 = 127.3\,\mathbf{i} - 127.3\,\mathbf{j}$$

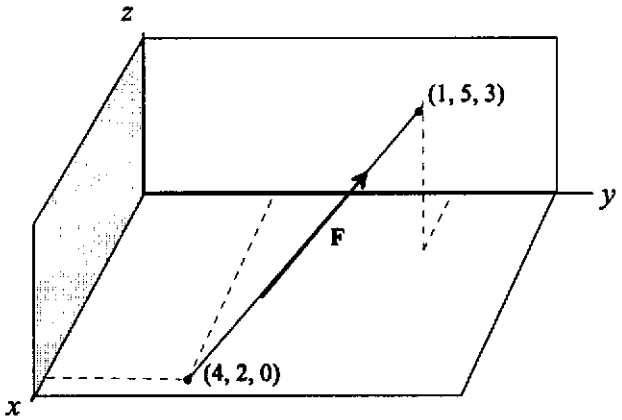
La resultante es $\mathbf{F} = \Sigma\,\mathbf{F}_i = 44.0\ \mathbf{i} - 21.5\ \mathbf{j}$, de donde $F = 49{,}0$ N y $\varphi = -26°$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 6-11

Una fuerza de 17,32 kg está dirigida a lo largo de la recta que va del punto de coordenadas (4, 2, 0) hasta el punto de coordenadas (1, 5, 3) tal como se muestra en la figura adjunta . Los valores de las coordenadas estan dados en metros. Determinar el momento de **F** respecto del origen *O* y los momentos respecto de los ejes *x*, *y*, *z*.



SOLUCION

De la figura se tiene que un vector unitario en la dirección y sentido de la fuerza es el vector

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{3}}{3}(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

luego el vector fuerza es $\mathbf{F} = 10(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$. El momento de la fuerza respecto del origen está dado por $\mathbf{M_0} = \overrightarrow{OP} \wedge \mathbf{F}$, donde el punto *P* extremo del vector $\overrightarrow{OP}$ es un punto cualquiera de la recta soporte de **F**. Tomando como punto *P* el punto de coordenadas (4 , 2, 0), el momento de la fuerza respecto del origen es

$$\mathbf{M_0} = 10(2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$$

El producto escalar del vector $\mathbf{M_0}$ por los vectores de la base **i, j, k** proporciona los momentos de la fuerza respecto de los ejes *x*, *y*, *z* . Sus valores son :

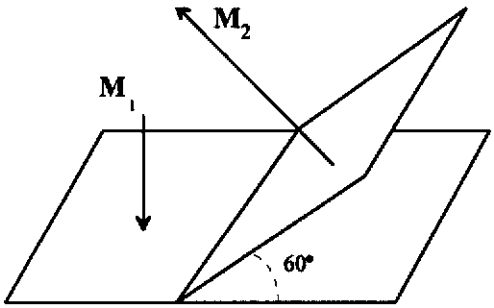
$$m_x = 20 \qquad m_y = -40 \qquad m_z = 60$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

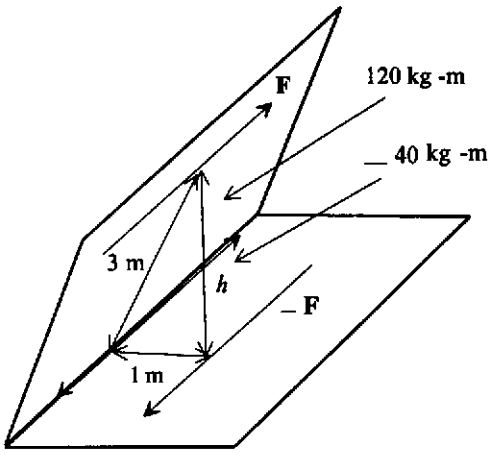
PROBLEMA 6-12

En la figura adjunta se representa un par de momento $M_1 = -40$ kg-m que actua sobre un plano horizontal y otro par de momento $M_2 = 120$ kg-m que actua sobre un plano que forma 60° con el horizontal. Determinar gráficamente el momento resultante **M**

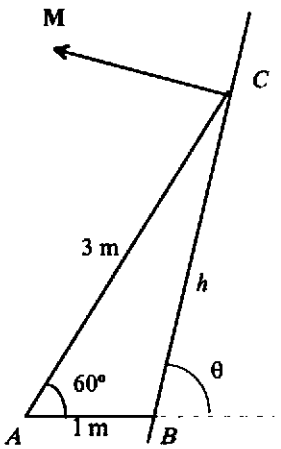


SOLUCION

El momento M_1 es el de un par de fuerzas de 40 kg situadas en el plano horizontal y separadas una distancia de un metro, y el momento M_2 es el de un para de fuerzas de 40 kg situadas en el plano inclinado y separadas una distancia de 3 m, tal como se muestra en la figura a). Para facilitar la suma de los momentos de los dos pares, los vectores que los forman se han tomado con sus direcciones paralelas a la recta de intersección de los planos.



a)



b)

El par resultante está formado por las fuerzas **F** y **– F** separadas una distancia h . Su momento es un vector **M** perpendicular al plano definido por **F** y **– F**, plano que forma con la horizontal un ángulo θ, figura b). Para calcular la distancia h, brazo del par resultante, aplicando la ley del coseno al

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

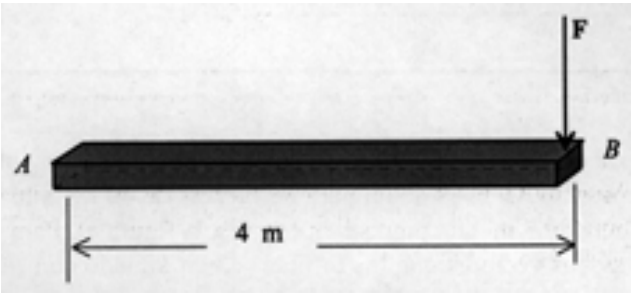
triángulo ABC se tiene $h = \sqrt{7} = 2{,}645$ m, luego el momento del par resultante es

$$M = 105{,}8 \text{ kg m}$$

Para calcular el ángulo θ, aplicando la ley del seno al triángulo ABC se tiene que $\theta = 79{,}2°$

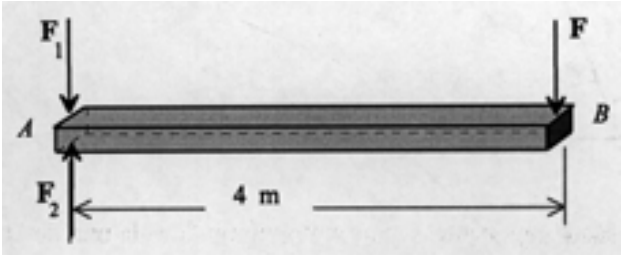
PROBLEMA 6-13

Una barra horizontal de 4 m de largo está sometida a una fuerza vertical hacia abajo de 12 kg aplicada en su extremo B. Demostrar que es equivalente a una fuerza de 12 kg hacia abajo aplicada en su extremo A y a un par de sentido horario de 48 kg-m.



SOLUCION

Apliquemos en el extremo A de la barra dos fuerzas verticales $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ de módulos iguales a F y de sentidos opuestos.



La fuerza $\mathbf{F}_2$ forma junto con la fuerza $\mathbf{F}$ un par, luego la fuerza resultante aplicada a la barra es la fuerza $\mathbf{F}_1$. El momento de la fuerza $\mathbf{F}$ respecto del extremo A de la barra es

$$\mathbf{M}_A = \overrightarrow{AB} \wedge \mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad M_A = 48 \text{ kg-m} \quad \text{sentido horario}$$

que es también el momento del par y el momento de $\mathbf{F}_1$ respecto de A es cero, luego la fuerza $\mathbf{F}_1$ aplicada en A y el par son equivalentes a la fuerza $\mathbf{F}$ aplicada en B.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

6.9 Reducción de sistemas de fuerzas concurrentes

Sean $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$ ..... $\mathbf{F}_n$, n fuerzas tales que sus líneas de acción se cortan todas en un mismo punto del espacio, figura 6-18. El conjunto de dichas fuerzas forma un sistema de fuerzas concurrentes. Tomaremos como origen de coordenadas el punto donde se cortan las fuerzas.

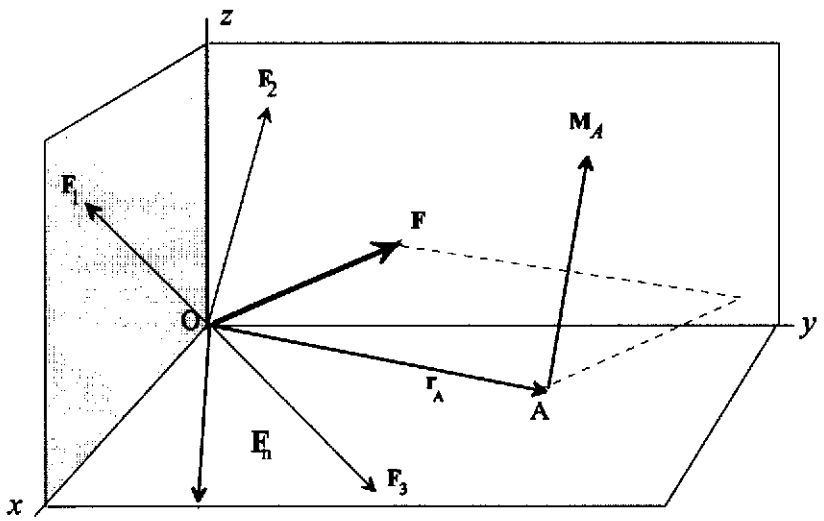


Fig. 6-18

El método de la construcción poligonal para la suma de vectores, obtenido como resultado de aplicar retiradamente la ley del paralelogramo a los vectores del sistema , proporciona la resultante **F** del sistema dada por

$$\mathbf{F} = \sum_1^n \mathbf{F}_i \tag{6-23}$$

Como ya se demostró en el Capítulo 2, el momento resultante del sistema respecto de un punto cualquiera del espacio es igual al momento de la resultante, es decir, que si $\mathbf{r}_A$ es el vector posición del punto respecto del origen se cumplen

$$\mathbf{M}_A = \sum_i^n \mathbf{M}_{iA} = \sum_i^n \mathbf{r}_A \wedge \mathbf{F}_i = \mathbf{r}_A \wedge \mathbf{F} \tag{6-24}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Este resultado constituye el *Teorema de Varignon*, cuyo enunciado dice que : *el momento respecto de un punto de la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes es igual a la suma de los momentos de cada una de las fuerzas del sistema respecto del mismo punto*. Las ecuaciones (6-23) y (6-24) expresan que la resultante y el sistema son equivalentes. En consecuencia, el sistema de fuerzas concurrentes se *reduce* a *un vector único* que es la resultante **F** aplicada en el punto común de las fuerzas del sistema. La acción de la resultante sobre un sólido rígido es la misma que la del sistema, es decir, la resultante **F** es *mecánicamente equivalente* al sistema original de fuerzas concurrentes $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, ... $\mathbf{F}_n$.

El sistema de fuerzas concurrentes está equilibrado cuando es *equivalente a cero*, es decir, que la resultante del sistema sea nula. En efecto, si la resultante es nula $\mathbf{F} = 0$, como su momento respecto de O es cero ya que **F** pasa por O, también lo es respecto de cualquier otro punto del espacio, luego el sistema es equivalente a cero.

En muchos problemas de estática es conveniente escribir la ecuación (6-23) en componentes, quedando

$$F_x = \sum F_{ix} \qquad F_y = \sum F_{iy} \qquad F_z = \sum F_{iz} \tag{6-25}$$

y de formas análoga para los momentos

$$M_x = \sum M_{ix} \qquad M_y = \sum M_{iy} \qquad M_z = \sum M_{iz} \tag{6-26}$$

La condición *necesaria y suficiente* para que un sólido bajo la acción de un sistema de fuerzas concurrentes esté en equilibrio es que la resultante del sistema sea igual a cero, condición que se establece mediante las ecuaciones

$$F_x = 0 \qquad F_y = 0 \qquad F_z = 0 \tag{6-27}$$

La condición de equilibrio expresada mediante la suma vectorial de las fuerzas, implica que al construir el polígono de fuerzas, añadiendo al extremo del vector $\mathbf{F}_1$ el equivalente al $\mathbf{F}_2$ y así sucesivamente hasta dibujar el equivalente a la fuerza $\mathbf{F}_n$, el extremo de éste coincida con el origen del $\mathbf{F}_1$, es decir, que la poligonal sea cerrada, figura 6-19.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

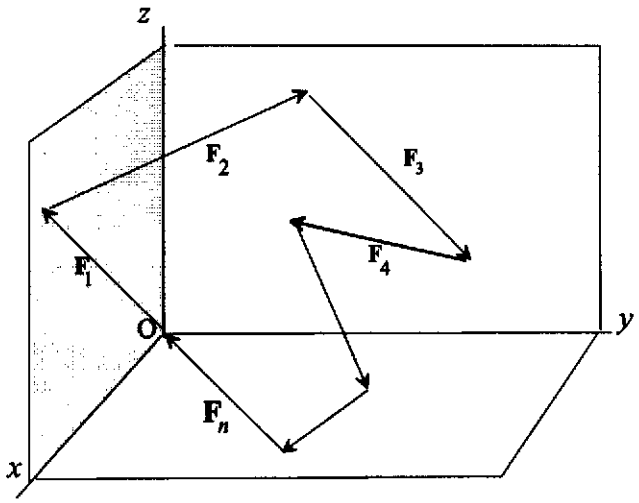


Fig. 6-19

6.9.1 Equilibrio de fuerzas coplanarias concurrentes

En el caso en que las fuerzas del sistema estén todas contenidas en un mismo plano, el sistema de fuerzas se denomina *coplanario*. La resultante **F** dada por la ecuación (6-23) está contenida en el mismo plano que contiene a las fuerzas del sistema y el momento **M** del sistema respecto de un punto cualquiera del plano es un vector perpendicular al plano, figura 6-20.

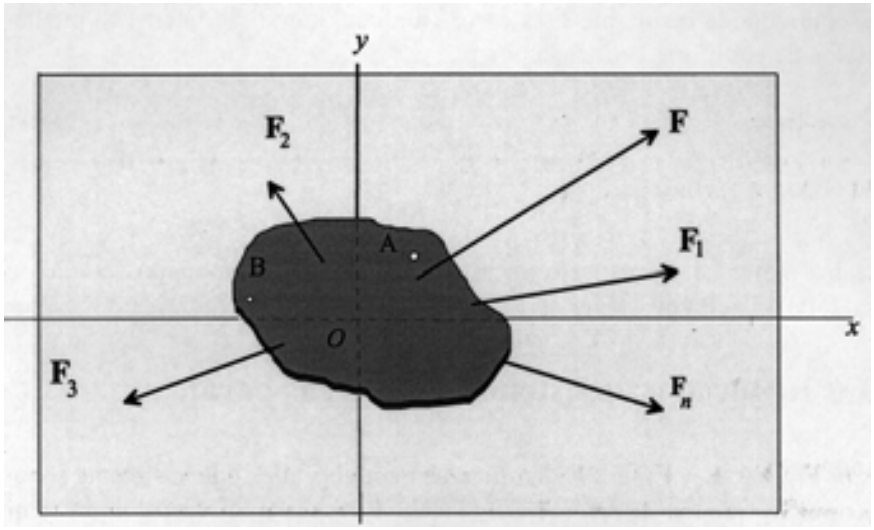


Fig. 6-20

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Tomando el origen O en el punto donde se cortan las fuerzas y dos ejes de la referencia, por ejemplo el eje X y el eje Y, en el plano que contiene a las fuerzas, las ecuaciones (6-25) se reducen a

$$F_x = \sum F_{ix} \qquad F_y = \sum F_{iy} \tag{6-28}$$

y el momento resultante respecto de cualquier otro punto del plano X, Y tiene únicamente componente según el eje Z

$$M_z = \sum M_{iz} \tag{6-29}$$

El sistema coplanario de fuerzas concurrentes, constituye uno de los casos más frecuentes en el estudio de los problemas de equilibrio de la partícula y del sólido rígido para el cual la resultante **F** y el momento resultante **M** son vectores perpendiculares. Para que exista equilibrio, el sistema de fuerzas ha de ser *equivalente a cero*, es decir la resultante **F** ha de ser cero. Como el momento respecto del origen es cero, la condición de equilibrio está dada por

$$\Sigma F_{i\,x} = 0 \qquad \Sigma F_{i\,y} = 0 \tag{6-30}$$

que asegura que la resultante **F** es cero. También, como fácilmente se puede comprobar, la condición de equilibrio está dada por

$$\Sigma M_{iA} = 0 \qquad \Sigma M_{iB} = 0 \tag{6-31}$$

donde los puntos A, B respecto de los cuales se toman momentos pueden elegirse cualesquiera del plano con tal que el origen no esté sobre la recta definida por ambos puntos.

6.10 Reducción de sistemas de fuerzas paralelas

Sean $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$ ..... $\mathbf{F}_n$, n fuerzas paralelas tales que sus rectas soportes quedan definidas por los puntos A_1 , A_2 , A_3 , A_4 ..... A_n, y sea $\mathbf{u}$ un vector unitario que define la dirección de las n fuerzas, es decir que $\mathbf{F}_i = F_i\,\mathbf{u}$ para i = 1,2,3..... n. Ahora las F_i son las componentes de las fuerzas según la dirección $\mathbf{u}$ y pueden tener valores tanto positivos

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

como negativos. El sistema de fuerzas paralelas constituye un sistema de vectores paralelos; la resultante y el momento resultante respecto del origen están dados por

$$\mathbf{F} = \sum_i^n F_i \mathbf{u} \tag{6-32}$$

$$\mathbf{M}_O = \left(\sum_i^n F_i \overrightarrow{OA_i}\right) \wedge \mathbf{u} \tag{6-33}$$

De ambas ecuaciones se tiene que el sistema se *reduce* a la resultante (6-32) aplicada en el origen, más un par de momento dado por (6-33). La *condición de equilibrio* es que el sistema reducido sea *equivalente a cero*, luego se tiene

$$\sum_i^n F_i = 0 \qquad \sum_i^n F_i \overrightarrow{OA_i} = 0 \tag{6-34}$$

Ahora bien, la resultante y el momento respecto del origen son perpendiculares, luego el momento mínimo es cero. Como ya vimos en el Capítulo 2, el eje central es la recta de momentos mínimos, y en el caso de vectores paralelos un punto del eje está dado por

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i^n F_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_i^n F_i} \tag{6-35}$$

El punto G definido por la ecuación (6-35) pertenece al eje central y se denomina *centro de fuerzas paralelas.* Por ser del eje central, el momento respecto de G es cero, luego el sistema de fuerzas se *reduce* a la resultante **F** aplicada en G.

6.10.1 Equilibrio de fuerzas coplanarias paralelas

Cuando el sistema de fuerzas paralelas es coplanario, el origen de coordenadas se toma en un punto del plano y dos de sus ejes contenidos en él. El momento resultante respecto del origen $\mathbf{M}_O$ es un vector perpendicular al plano. El sistema se reduce a la resultante **F** aplicada en el origen y a un par, cuyo momento **M** sea igual al del sistema respecto del origen, figura 6-21.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

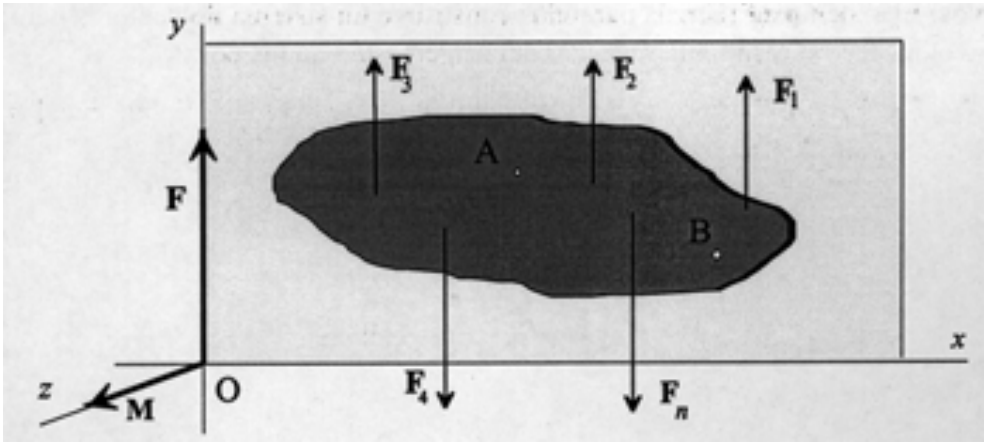


Fig. 6-21

Haciendo coincidir la dirección de las fuerzas con uno de los ejes de coordenadas, por ejemplo el eje *y*, la ecuación (6-32) cambia

$$\mathbf{F} = \sum_i^n F_i \, \mathbf{j} \tag{6-36}$$

y la ecuación (6-33) a

$$\mathbf{M}_O = \left(\sum_i^n F_i \overrightarrow{OA_i}\right) \wedge \mathbf{j} = \sum_i^n M_{iz} \, \mathbf{k} \tag{6-37}$$

La condición de *equilibrio* de un sistema de un sistema coplanario de fuerzas paralelas queda asegurado por las condiciones

$$\Sigma F_i = 0 \qquad \Sigma M_{iz} = 0 \tag{6-38}$$

Fácilmente se puede ver que la condición de equilibrio también queda establecida mediante las ecuaciones

$$\Sigma M_{iA} = 0 \qquad \Sigma M_{iB} = 0 \tag{6-39}$$

donde *A* y *B* son dos puntos cualesquiera del plano con la condición de que no definan una recta paralela a las fuerzas del sistema.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

6.11 Reducción de sistemas de fuerzas que se cruzan

Sean $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$ ..... $\mathbf{F}_n$ n fuerzas tales que sus rectas soportes definidas por los puntos A_1 , A_2 , A_3 , A_4 ..... A_n no se cortan entre sí, figura 6-22.

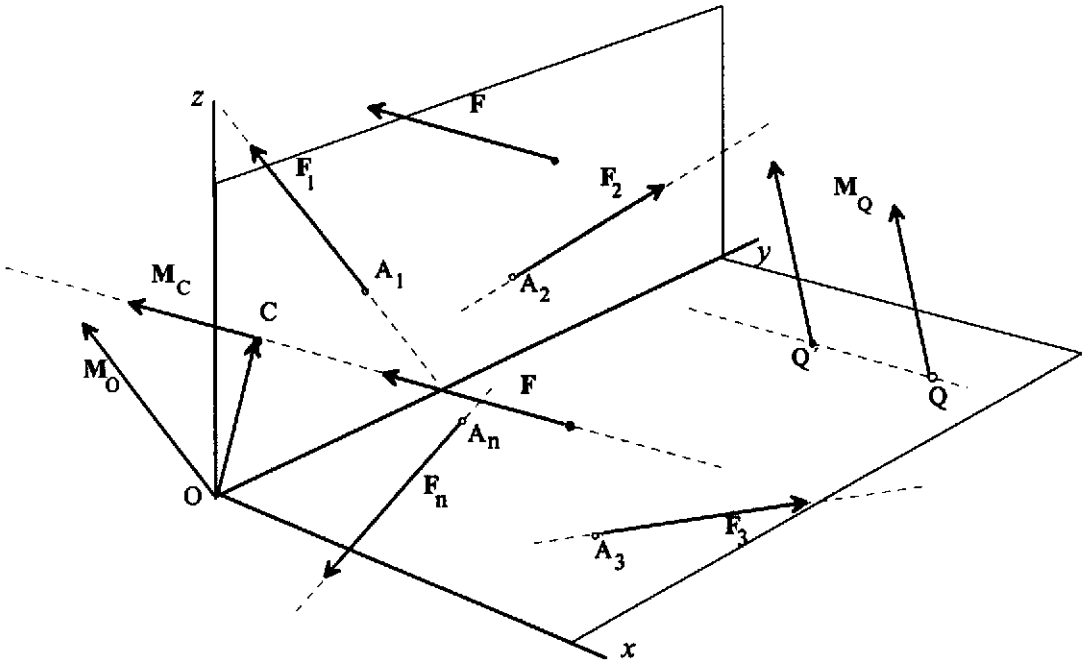


Fig. 6-22

El conjunto de fuerzas forma un sistema de vectores deslizantes que se cruzan. La resultante **F** del sistema es la suma de los vectores equivalentes a las fuerzas del sistema trazados en un punto Q cualquiera del espacio. De está manera se tiene el módulo, dirección y sentido de la resultante

$$\mathbf{F} = \sum_1^n \mathbf{F}_i \tag{6-40}$$

El momento resultante del sistema de fuerzas respecto del origen es la suma de los momentos respecto del origen de cada una de las fuerzas del sistema

$$\mathbf{M}_o = \sum_i^n \mathbf{M}_{io} = \sum_1^n \mathbf{r}_{A\,i} \wedge \mathbf{F}_i \tag{6-41}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

donde $\mathbf{r}_{A_i}$ es el vector posición del punto de aplicación A_i de la fuerza $\mathbf{F}_i$, respecto del origen. El sistema se *reduce* a la resultante (6-40) aplicada en el origen y a un par cuyo momento sea el momento resultante del sistema respecto del origen dado por la ecuación (6-41). La condición de *equilibrio* es que el sistema sea *equivalente a cero*, es decir que se cumpla

$$\sum_1^n \mathbf{F}_i = 0 \qquad \sum_i^n \mathbf{M}_{io} = \sum_1^n \mathbf{r}_{A_i} \wedge \mathbf{F}_i = 0 \tag{6-42}$$

Para este caso, el eje central es la recta tal que el momento del sistema respecto de uno cualquiera de sus puntos, es paralelo a la resultante. Las coordenadas del punto C por el cual pasa el eje central están dadas por el extremo del vector, figura 6-23.

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\mathbf{F} \wedge \mathbf{M}_o}{F^2} \tag{6-43}$$

y el momento $\mathbf{M}_C$ del sistema de fuerzas respecto de C es paralelo a la resultante $\mathbf{F}$ del sistema. Si $\mathbf{M}_o$ forma un ángulo θ con $\mathbf{F}$, el módulo de $\mathbf{M}_C$ es $M_C = M_o \cos\theta = \mathbf{M}_o \cdot \mathbf{F}/F$.

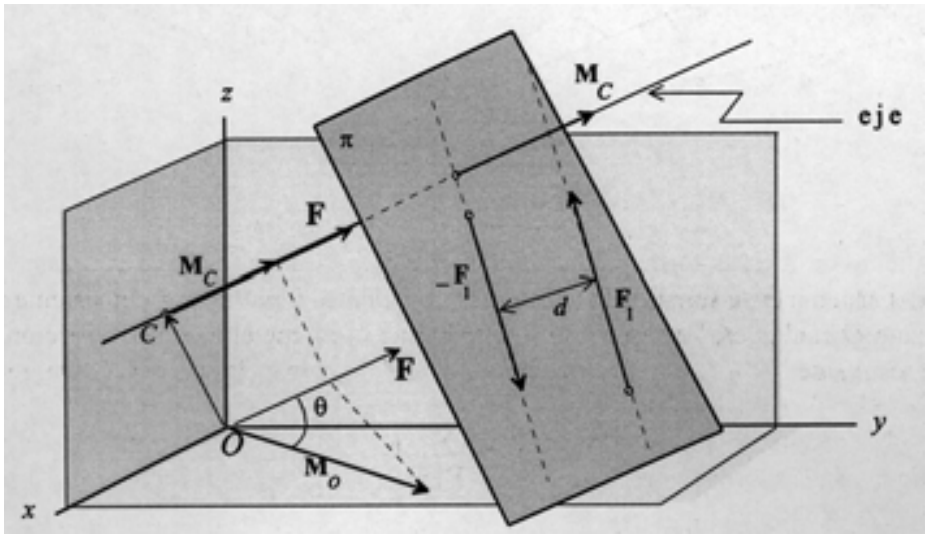


Fig. 6-23

Dibujemos un plano π cualquiera perpendicular al eje, figura 6-23. En dicho plano se pueden representar infinitos pares de fuerzas cuyo momento coincida con $\mathbf{M}_C$. El sistema

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

formado por la resultante **F** pasando por *C*, mas un par de momento $\mathbf{M}_C$ es equivalente al sistema original de fuerzas, ya que ambos tienen la misma resultante y el mismo momento resultante respecto de el punto *C*. En consecuencia, *el sistema mas general de fuerzas que se cruzan se reduce a una fuerza, la resultante* **F** *del sistema y a un par, de momento el momento mínimo* $\mathbf{M}_C$ *del sistema.* Cuando el módulo de los vectores del par es igual al módulo de la resultante **F** del sistema, el sistema se denomina *torsor* y la distancia entre los vectores del par es la *flecha del torsor* dada por $\delta = M_m / F$.

6.11.1 Equilibrio de fuerzas coplanarias que se cruzan

Cuando todas las fuerzas del sistema $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$ ..... $\mathbf{F}_n$ están contenidas en un mismo plano, el sistema de fuerzas se llama coplanario, figura 6-24.

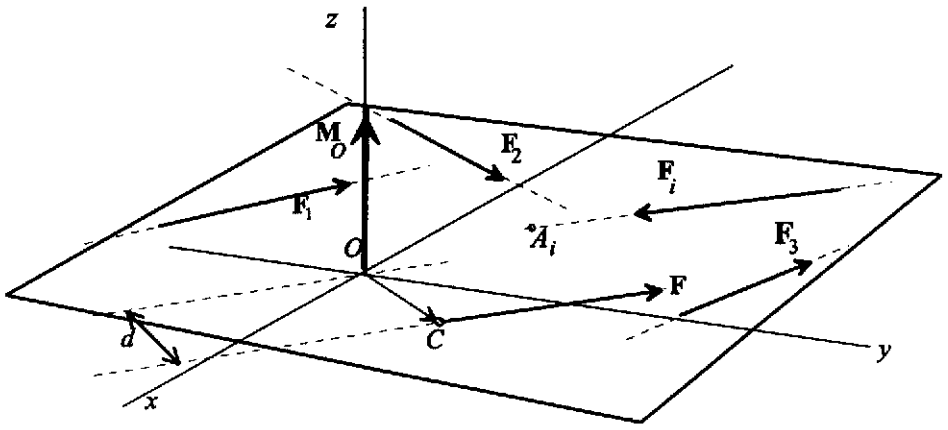


Fig .6-24

En general, se hace coincidir el plano de las fuerzas con uno de los planos de coordenadas, por ejemplo el *X, Y*. La resultante **F** del sistema está contenida en el mismo plano y el momento resultante **M** respecto de cualquier punto del plano es la suma de los momentos de cada una de las fuerzas del sistema respecto del punto, los cuales son perpendiculares al plano, luego **M** también lo es. En consecuencia, la resultante **F** y el momento **M** son vectores perpendiculares. Las ecuaciones (6-40) y (6-41) cambian a

$$\mathbf{F} = (\sum_1^n F_{ix})\mathbf{i} + (\sum_1^n F_{iy})\mathbf{j} \qquad (6\text{-}44)$$

$$\mathbf{M}_o = \sum_1^n \overrightarrow{OA_i} \wedge \mathbf{F}_i = (\sum_i^n M_{iz})\mathbf{k} \qquad (6\text{-}45)$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

La condición de equilibrio para un sólido, bajo la acción de un sistema de fuerzas que se cruzan coplanarias, figura 6-25, queda establecida por el siguiente sistema de ecuaciones

$$\Sigma F_{i\,x} = 0 \qquad \Sigma F_{i\,y} = 0 \qquad \Sigma M_{i\,z} = 0 \tag{6-46}$$

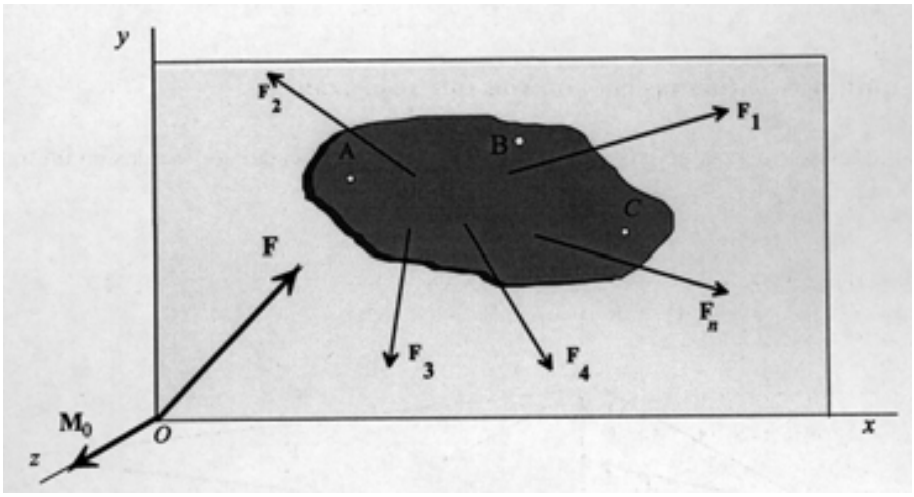


Fig. 6-25

La condición de que el sistema de fuerzas sea equivalente a cero, también queda establecida por las ecuaciones

$$\Sigma F_{i\,x} = 0 \qquad \Sigma M_{i\,A} = 0 \qquad \Sigma M_{i\,B} = 0 \tag{6-47}$$

donde A y B son puntos cualesquiera con tal que la recta definida por los dos puntos no sea paralela al eje y. Por último, como fácilmente se puede comprobar, la condición de equilibrio puede formularse por las ecuaciones

$$\Sigma M_{i\,A} = 0 \qquad \Sigma M_{i\,B} = 0 \qquad \Sigma M_{i\,C} = 0 \tag{6-48}$$

siendo A, B y C son tres puntos cualesquiera del plano con tal que no estén alineados. Veamos que el sistema equivale a una fuerza única. Consideremos de nuevo el sistema de fuerzas de la figura 6-24. Tomando módulos en la ecuación (6-43) y llamando d al módulo del vector $\overrightarrow{oc}$, que es la distancia trazada desde el origen a la recta paralela a **F** que pasa por C, se tiene $F\,d = M_o$ y en forma vectorial $\mathbf{M}_o = \overrightarrow{oc} \wedge \mathbf{F}$, donde C es un punto del eje central

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

luego, el momento del sistema respecto de C es cero. El vector **F** aplicado en C es equivalente al sistema de fuerzas coplanarias ya que ambos tienen la misma resultante y el mismo momento resultante respecto de un punto del plano. En consecuencia, *el sistema de fuerzas coplanarias se reduce a un vector único formado por la resultante* **F** *aplicada en C.*

6.12 Equilibrio de tres fuerzas coplanarias

Cuando el sistema de fuerzas coplanarias que actúa sobre un sólido rígido está formado solo por *tres fuerzas,* o puede reducirse a tres, para que el sólido esté en equilibrio es *necesario* que las tres fuerzas sean *concurrentes o paralelas*. El sólido de la figura 6-26 a) no está en equilibrio ya que las fuerzas que actúan sobre él no se cortan en el mismo punto.

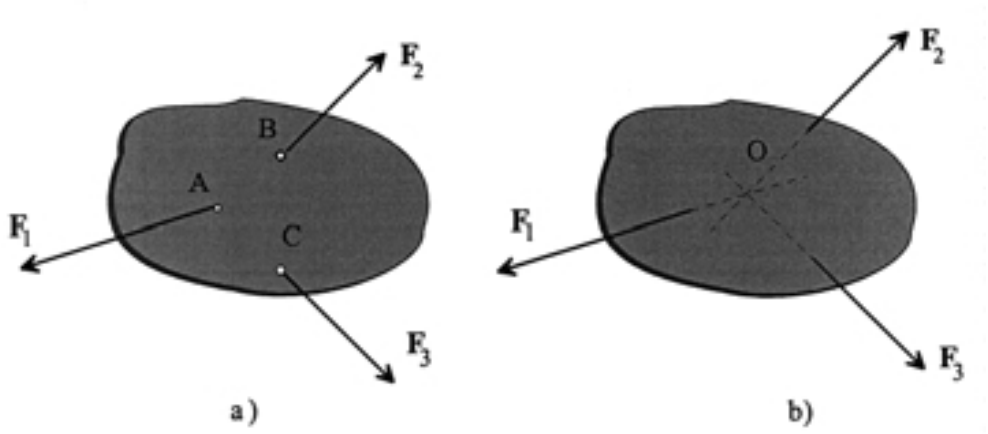


Fig. 6-26

Para que esté en equilibrio, si dos de las fuerzas se cortan en un punto O, figura 6-26 b), necesariamente la dirección de la tercera fuerza ha de pasar por O, condición impuesta por que en el equilibrio el momento del sistema ha de ser nulo y no lo sería si la tercera fuerza no pasa por O. Este resultado facilita mucho la resolución gráfica de problemas relativos al equilibrio del sólido en los casos en que se desconoce la dirección de una de las tres fuerzas. Determinando el punto de intersección de las dos fuerzas conocidas, es posible fijar la línea de acción de la tercera fuerza ya que está debe de pasar por el punto de intersección de las dos primeras. En el equilibrio de un sólido rígido con un punto fijo, sometido a un sistema de fuerzas coplanarias concurrentes, la reacción ha de equilibrarse con la resultante de todas las fuerzas activas, la cual ha de pasar necesariamente por el punto fijo.

El problema del equilibrio se llama *estáticamente determinado* si el número de incógnitas es igual al de ecuaciones independientes. Si el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones de equilibrio independientes, el problema se denomina *estáticamente indeterminado*. Para el equilibrio de un sistema de fuerzas coplanarias concurrentes

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

estáticamente determinado, el número de incógnitas no ha de ser más de dos y para un sistema de fuerzas arbitrario, no ha de ser más de tres.

El procedimiento a seguir en la resolución de problemas relativos al equilibrio de un sistema plano de fuerzas mediante el método de las proyecciones incluye los siguientes pasos:

1) *aislar el sólido para determinar las magnitudes desconocidas*

2) *representar las fuerzas activas (incluido el peso en el centro de gravedad del sólido)*

3) *dibujar el diagrama del sólido libre bajo la acción de las fuerzas activas y de las reacciones de los vínculos (incluyendo dimensiones para calcular momentos)*

4) *cerciorarse que el problema es estáticamente determinado*

5) *elegir en el plano de acción de las fuerzas los ejes de coordenadas orientados de modo que sean paralelos o perpendiculares a la mayoría de las fuerzas.*

Las proyecciones de las fuerzas se consideran son positivas o negativas según que su sentido coincida con el sentido positivo o negativo de los ejes de coordenadas. Las ventajas del método analítico sobre el método geométrico del polígono de fueras son evidentes en los problemas de equilibrio cuando existen más de tres fuerzas concurrentes. En estos casos, la resolución del polígono de fuerzas presenta ciertas dificultades, mientras que el método de las proyecciones solo implica un número mayor de fuerzas a proyectar.

6.13 Equilibrio de sistemas de sólidos

Consideremos ahora el equilibrio de un conjunto de sólidos que están en contacto unos con otros por medio de sus superficies o acoplados mediante articulaciones, pasadores, hilos o barras. Un problema importante en la estática de un sistema de sólidos es la determinación de las reacciones en los vínculos, para lo cual, junto con el equilibrio del sistema se analiza el equilibrio de los distintos sólidos que lo forman. Una vez seleccionado un cuerpo concreto, todos los demás sólidos del sistema y sus vínculos respectivos se omiten y las acciones de estos sobre el cuerpo cuyo equilibrio se considera, se sustituyen por las correspondientes reacciones.

Al establecer el equilibrio de todo el sistema de cuerpos, las reacciones vinculares entre ellos, son fuerzas internas mutuamente equilibradas, y por lo tanto, no intervienen en las ecuaciones de equilibrio. Sin embargo, al considerar el equilibrio de cada cuerpo por separado, las reacciones respectivas con el resto del sistema, son fuerzas externas y entran en las ecuaciones de equilibrio. En general, al resolver problemas referentes al equilibrio de un sistema de sólidos, el número de ecuaciones obtenidas al considerar el equilibrio del conjunto no son suficientes para que el sistema esté estáticamente determinado. Para todo el conjunto,

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

las condiciones de equilibrio se reducen, a tres ecuaciones para un sistema plano arbitrario de fueras, o bien a dos ecuaciones, para un sistema de fuerzas paralelas. En estos casos, el número de incógnitas puede ser mayor que el número de ecuaciones.

Esta circunstancia no hace que el sistema sea estáticamente indeterminado, ya que si el sistema se separa en diferentes cuerpos sólidos y se plantean las ecuaciones de equilibrio para cada uno de ellos, pueden aparecer un número de nuevas incógnitas menor que el de nuevas ecuaciones de equilibrio. Si el número total de ecuaciones de equilibrio independientes asociadas, a todo el sistema y a sus partes separadas, es igual al número total de incógnitas, el problema estará estáticamente determinado.

Cuando el sistema de sólidos se subdivide en diferentes cuerpos, al reemplazar las interacciones por las reacciones entre dos cuerpos, teniendo en cuenta la ley de acción - reacción, la reacción que actúa sobre el segundo cuerpo se toma de modo que sea igual en módulo y de sentido opuesto a aquella que actúa sobre el primero de cuerpos.

Por último, al plantear las ecuaciones de equilibrio, los ejes de coordenadas y los puntos respecto de los cuales se plantean las ecuaciones de los momentos de las fuerzas, se elegirán de manera que en cada ecuación aparezca una sola incógnita. Básicamente, el método de resolución a seguir es el mismo que el correspondiente a un sólido rígido.

6.14 Reacciones vinculares en sistemas planos

En un sistema plano, las fuerzas activas están contenidas en un mismo plano, por lo tanto, las reacciones vinculares necesarias para mantener el sistema en equilibrio deberán estar contenidas también en el mismo plano de las fuerzas activas. Las reacciones ejercidas por los vínculos sobre un sistema bidimensional pueden clasificarse en tres grupos correspondientes a los tres tipos básicos de vínculos:

a) Vínculos establecidos por: *apoyos en superficies lisas, cable tensados y bielas, collarines y pasadores sobre varillas y ranuras lisas. Cada* uno de estos vínculos puede impedir el movimiento sólo en una dirección definida, luego introduce *una incógnita,* que es el módulo de la reacción.

b) Vínculos establecidos por: *superficies rugosas, articulaciones o bisagras, pasadores.* Estos vínculos impiden la traslación en cualquier dirección pero no el movimiento de giro respecto del enlace, luego introducen *dos incógnitas* expresadas como las componentes de la reacción o bien como el módulo de la reacción y el ángulo que forma con la horizontal.

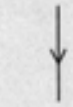
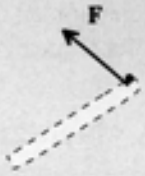
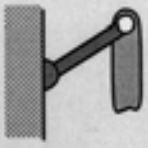
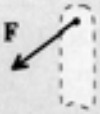
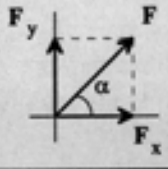
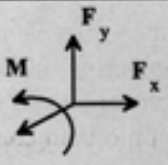
c) Vínculos establecidos por: *empotramientos.* Las reacciones de este tipo impiden completamente el movimiento tanto de traslación como de rotación, luego introducen *tres incógnitas,* dos correspondientes a las componentes de la fuerza y una al momento del par de reacción.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Tabla 6-1

Reacciones vinculares planas

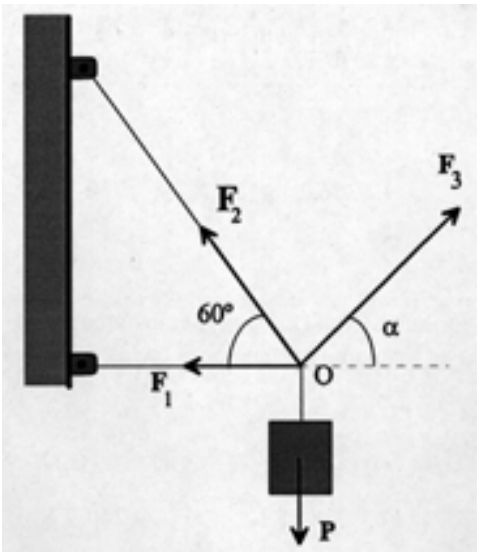
	Vinculo	*Direccion (es) prohibidas*	*Reaccion (es)*	*Incognita (as)*
Apoyo liso				Modulo de F
Cable				Modulo de F
Barra				Modulo de F
Articulación				F x , F y o F , α
Empotramiento				F x , F y , M

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 6-14

En el esquema de la figura adjunta, un bloque de 600 N de peso pende de dos cables. Determinar: a) el intérvalo de valores de la fuerza $\mathbf{F}_3$ para que ambos cables esten tensos; b) el valor de las tensiones para F_3 = 500 N. Dato : tg α = 4/3



SOLUCION

a) En el punto O concurren cuatro fuerzas coplanarias **P**, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$. Para que el punto este en equilibrio se ha de cumplir

$$\mathbf{P} + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$$

Seleccionando el sistemas de coordenadas con origen en el punto O y con el eje *x* horizontal, la condición de equilibrio queda

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad (1)$$

La fuerza $\mathbf{F}_3$ forma con la horizontal un ángulo α, tal que tg α = 4/3, de donde se tiene que las componentes de F_3 están dadas por

$$F_{3x} = 3F/5 \qquad F_{3y} = 4F/5$$

El sistema de ecuaciones (1) queda

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$3F_3 = 5F_1 + \frac{5}{2}F_2 \qquad 4F_3 = 3000 - \frac{5\sqrt{3}}{2}F_2 \qquad (2)$$

El sistema de ecuaciones (2) tiene tres incógnitas, luego es estáticamente indeterminado. El valor mínimo de F_3 corresponde a $F_1 = 0$. Sustituyendo y resolviendo el sistema se obtiene que el valor mínimo de F_3 es 326.2 N. El valor máximo de F_3 corresponde a $F_2 = 0$, de donde su valor es de 750 N. Para que los dos cables estén tensados, la fuerza F_3 ha de estar comprendida entre ambos valores

$$326{,}2 < F_3 < 750$$

b) Fijado el valor de la fuerza F_3, el sistema (2) contiene dos incógnitas, luego es estáticamente determinado. Resolviendo el sistema se tiene que las tensiones en los cables están dadas por

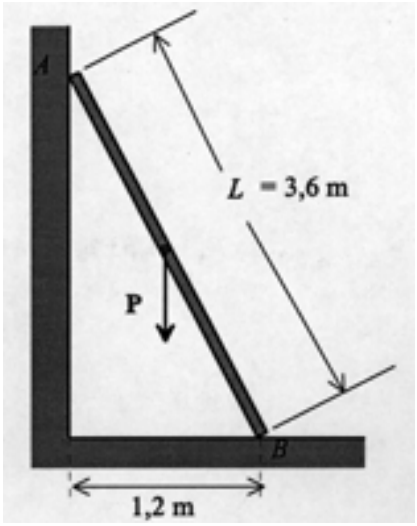
$$F_1 = 184{,}5\ \text{N} \qquad F_2 = 230{,}9\ \text{N}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

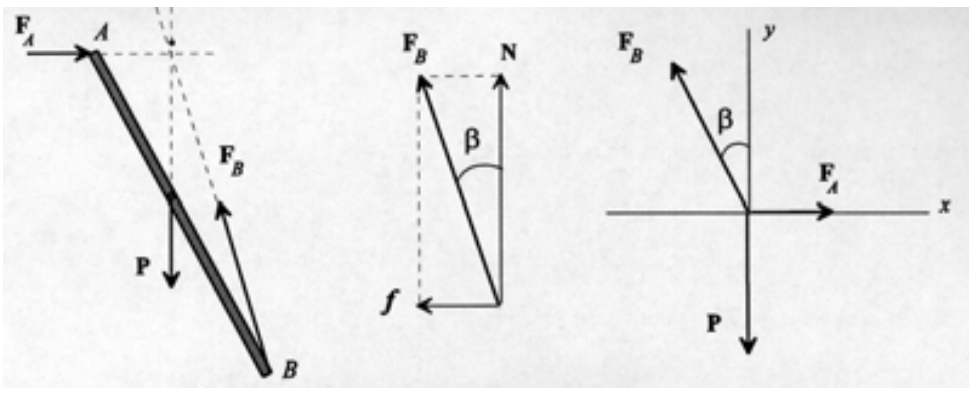
PROBLEMA 6-15

La barra homogenea de la figura tiene un peso de 20 kg y una longitud de 3,6 m. Su extremo *A* se apoya sobre una pared vertical lisa y su extremo *B* sobre un suelo horizontal rugoso a una distancia de 1,2 m de la pared. Determinar: a) las reacciones en los apoyos y el ángulo β que forma $\mathbf{F}_B$ con la normal, b) el ángulo límite de equilibrio de la barra con la pared si el coeficiente de rozamiento con el suelo es $\mu = 0{,}35$



SOLUCION

a) Para que un sólido libre sometido a tres fuerzas coplanarias este en equilibrio, la condición necesaria es que las tres fuerzas se corten en un punto. La fuerza $\mathbf{F}_B$ de dirección desconocida tiene que pasar por el punto de corte de las dos cuya dirección se conoce, $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{P}$. La suma de las tres fuerzas ha de ser nula. Gráficamente se tiene



Igualando a cero la suma de fuerzas según el eje *x* y según el eje *y* se tiene

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$\sum F_x = F_A - f = F_A - F_B \operatorname{sen} \beta = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = N - P = F_B \cos \beta - P = 0 \qquad (2)$$

un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas F_A, F_B y β. Se necesita la ecuación de los momentos. Igualando a cero la suma de momentos respecto del punto B, queda

$$\sum M_B = -3,4F_A + 0,6P = 0$$

de donde se tiene $F_A = 3,53 \text{ kg} = 34,6 \text{ N}$

De la ecuaciones (1) y (2) se tiene $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{F_A}{P} = 0,1765 \Rightarrow \beta = 10°$

Sustituyendo valores se tiene para F_B $F_B = \dfrac{P}{\cos \beta} = 20,3 \text{ kg} = 199 \text{ N}$

b) Sea α el ángulo que forma la barra con la pared en la situación de movimiento inminente. La fuerza de rozamiento tiene su valor máximo, luego

$$f_r = \mu N = \mu P = F_A$$

Tomando momentos respecto del punto B se tiene

$$-F_A L \cos \alpha + P \frac{L}{2} \operatorname{sen} \alpha = 0$$

y sustituyendo el valor de F_A se obtiene

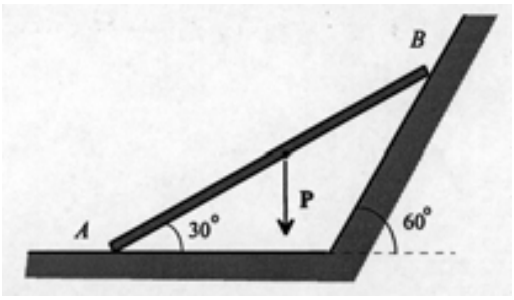
$$\operatorname{tg} \alpha = 2\mu = 0,70 \Rightarrow \alpha = 35°$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

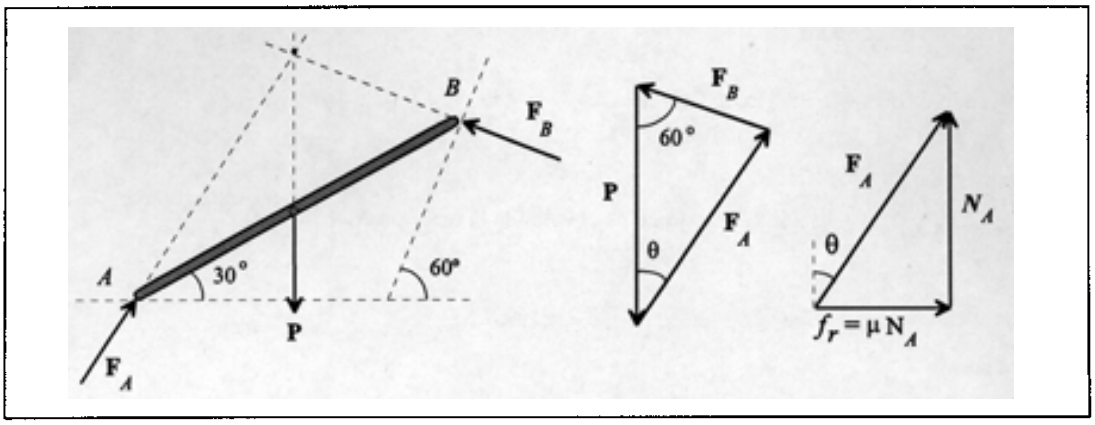
PROBLEMA 6-16

Una barra homogénea de peso 20 kg. y longitud L se apoya sobre dos superficies tal como se muestra en la figura. En el extremo B la pared es lisa y en el extremo A rugosa. Determinar el valor *mínimo* de μ para que la barra esté en equilibrio y las reacciones en los apoyos.



SOLUCIÓN

La barra está sometida a tres fuerzas coplanarias. Las direcciones de las fuerzas $\mathbf{F}_B$ y $\mathbf{P}$ son conocidas y de la condición de equilibrio se deduce que la tercera fuerza $\mathbf{F}_A$ tiene que pasar por el punto de corte de las dos anteriores. Dibujando el diagrama del sólido libre se tiene :



Las tres fuerzas se han de cortar en un punto y su suma ha de ser nula. La componente horizontal de $\mathbf{F}_A$ es la fuerza de rozamiento $f = F_A \operatorname{sen}\theta$. Para el valor mínimo de μ compatible con el equilibrio, la fuerza de rozamiento tiene su valor máximo, luego se tiene que

$$f = \mu N_A \qquad \text{siendo} \qquad \mu = \operatorname{tg}\theta \qquad \text{y} \qquad N_A = P - F_B \cos 60^\circ \tag{1}$$

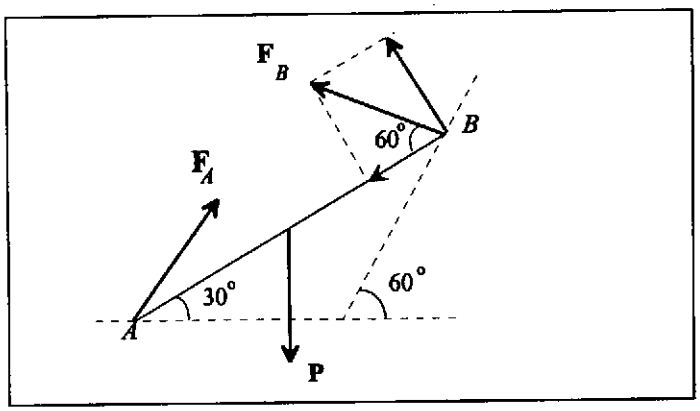
Del triángulo de fuerzas se deduce que

$$\mu N_A = F_A \operatorname{sen}\theta = F_B \operatorname{sen} 60^\circ \tag{2}$$

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Determinación de las reacciones en los apoyos.



Tomando momentos respecto de A se tiene que $F_B = P/2$, luego el valor de F_B es

$$F_B = 98 \text{ N}$$

De las ecuaciones (1) y (2) se tiene que

$$\mu = \frac{\text{sen } 60^\circ}{2 - \cos 60^\circ} = 0,577 \quad \Rightarrow \quad \theta = 30^\circ$$

Conocidos F_B y θ, la ecuación (2) proporciona el valor de la reacción en A

$$F_A = 169,7 \text{ N}$$

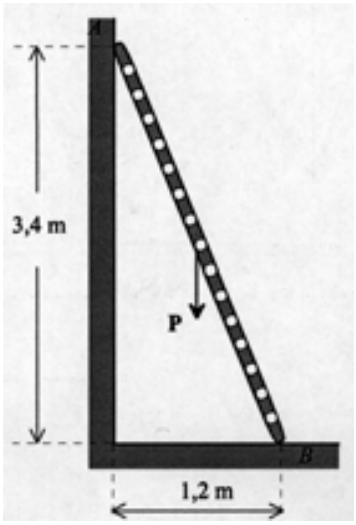
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 6-17

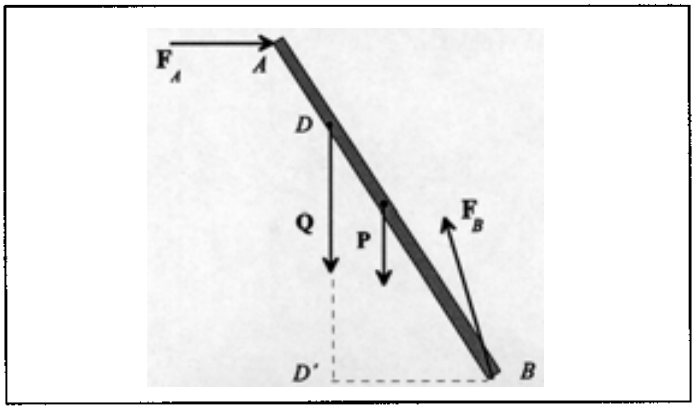
Una escalera de peso P, se apoya en una pared vertical lisa y sobre un suelo horizontal rugosos tal como se ve en la figura. La distancia entre peldaños es de 30 cm. Una persona de peso Q asciende por la escalera. Determinar hasta que peldaño puede ascender sin que la escalera se caiga.
Datos: $P = 20$ kg ; $Q = 60$ kg. ; $\mu = 0{,}265$



SOLUCIÓN

Se puede ascender por la escalera hasta un punto D, en el cual la componente horizontal de $\mathbf{F}_B$ sea igual al valor máximo de la fuerza de rozamiento. En esta posición, $\mathbf{F}_B$ forma con la normal en B un ángulo θ tal que $\mu = \text{tg}\,\theta = 0{,}265$. Las direcciones de las cuatro fuerzas que actúan sobre la escalera son conocidas. Si D es el punto de la escalera hasta donde puede ascender la persona de peso Q,, las direcciones de las cuatro fuerzas se deben cortar en el punto donde se cortan $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{Q}$ y su suma ha de ser cero.

Diagrama del sólido libre

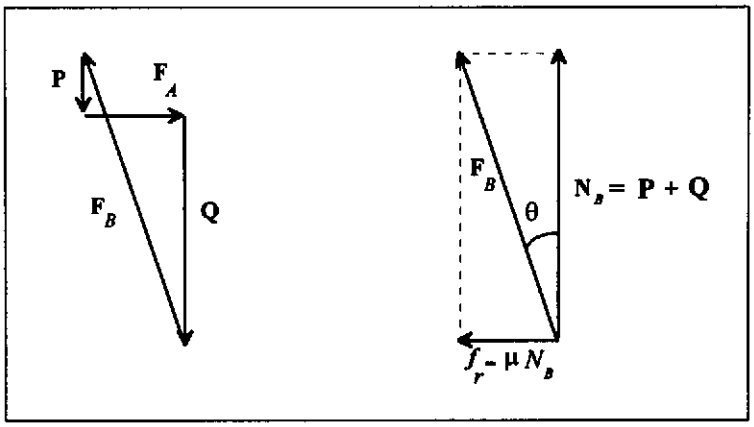


© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Sumando gráficamente queda



de donde se tiene

$$F_A - F_B \operatorname{sen}\theta = 0 \qquad \text{y} \qquad F_A = f_r = \mu N_B = \mu (P + Q)$$

La distancia $\overline{BD} = \sqrt{\overline{DB}^2 + \overline{DD'}^2}$ determina la posición del punto D respecto del pie de la escalera. Igualando a 0 el momento respecto del punto B, se tiene

$$-3,4 F_A + 0,6 P + \overline{BD}\, Q = 0 \qquad \overline{BD} = 1,0\,\text{m}$$

Por semejanza de triángulos se obtiene que $\overline{DD'} = 2,83\,\text{m}$. Sustituyendo queda que $\overline{BD} = 3,0\,\text{m}$ luego se puede ascender hasta el peldaño nº 10.

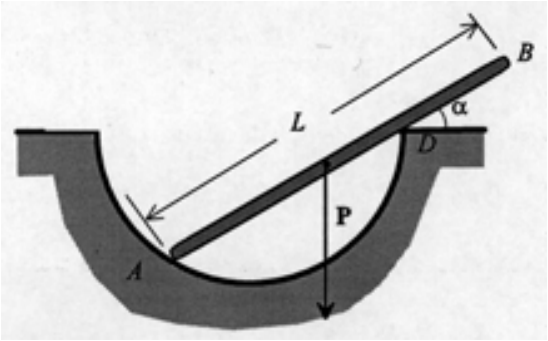
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 6-18

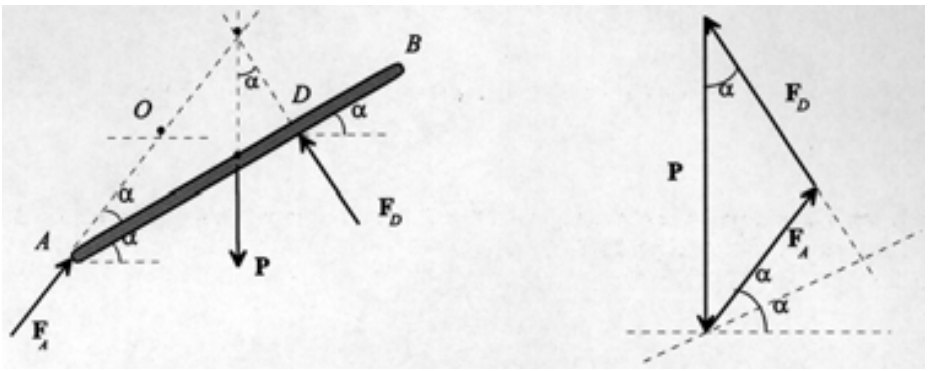
Una barra homogénea de longitud L y peso P se apoya sobre una superficie esférica lisa tal como se ve en la figura. Determinar el ángulo α correspondiente a la situación de equilibrio si el radio de la esfera es R y la longitud de la barra es $L = 3\,R$.



SOLUCIÓN

Los apoyos en A y D son lisos, luego la reacción en A es perpendicular a la semiesfera, y por tanto tiene la dirección radial y en D la reacción es perpendicular a la barra. Para la posición de equilibrio, las fuerzas de reacción ejercidas por los apoyos sobre la barra se han de cortar en un punto de la recta soporte del peso **P**.

Diagrama del sólido rígido y triángulo de fuerzas.



Proyectando en el triángulo de fuerzas sobre la dirección de la barra, se tiene

$$F_A \cos\alpha = P \operatorname{sen}\alpha \qquad \Rightarrow \qquad F_A = P \operatorname{tg}\alpha$$

De la figura se tiene que la longitud de barra apoyada en la semiesfera está dada por

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$\overline{AD} = 2R\cos\alpha$$

Tomando momentos respecto de D (momentos de las componentes perpendiculares a la barra de $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{P}$) se tiene

$$-(F_A \operatorname{sen}\alpha)\,\overline{AD} + (P\cos\alpha)(\overline{AD} - L/2) = 0 \qquad (1)$$

Sustituyendo en la ecuación (1) los valores de F_A y la distancia $\overline{AD}$ se tiene

$$-2\operatorname{sen}^2\alpha + 2\cos^2\alpha - \frac{3}{2}\cos\alpha = 0$$

Operando queda

$$\cos^2\alpha - \frac{3}{8}\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0$$

de donde se obtiene el valor de α

$$\cos\alpha = 0{,}91875 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 23{,}25^\circ$$

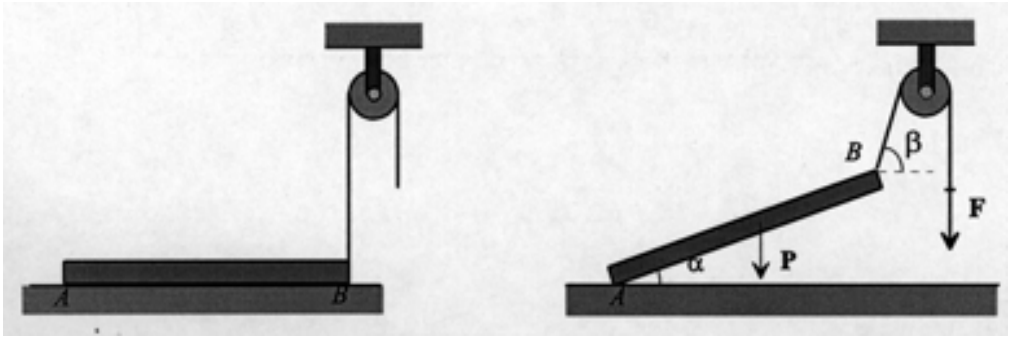
www.elsolucionario.net

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 6-19

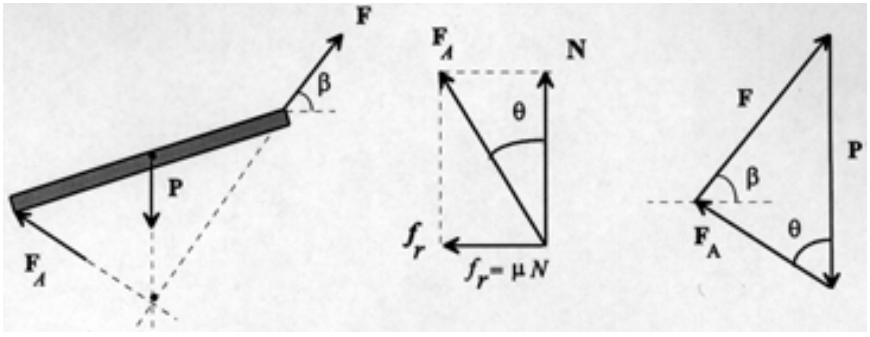
Una barra homogénea de peso P y longitud L está apoyada longitudinalmente sobre un plano horizontal rugoso (el coeficiente de rozamiento es μ). Su extremo B está unido a un cable que pasa a través de una polea lisa. Tirando del extremo libre del cable con una fuerza F se eleva la barra un ángulo α como se muestra en la figura. Determinar la relación entre los ángulos α y β para que la barra no deslize, siendo α el valor máximo para el cual la barra está en equilibrio.



SOLUCIÓN

Se conocen las direcciones de la fuerza **F** y el peso de la barra **P**. La reacción $\mathbf{F}_A$ en A, tiene que pasar por el punto de corte de **F** y **P**. La componente horizontal de $\mathbf{F}_A$ es la fuerza de rozamiento y en la situación límite, su valor es máximo $f_r = \mu N$ y en la condición de movimiento inminente $\mathbf{F}_A$ forma con la normal en A un ángulo θ tal que $\text{tg}\,\theta = \mu$.

Diagrama del sólido libre y triángulo de fuerzas.



Del triángulo de fuerzas se tiene

$$F\cos\beta = F_A \operatorname{sen}\theta = \mu N = \mu\,(P - F\operatorname{sen}\beta)$$

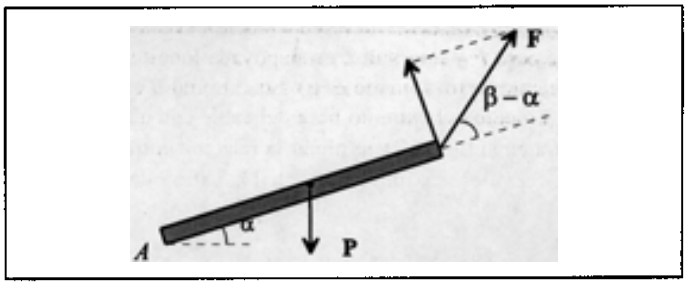
Agrupando términos queda $$F\,(\cos\beta + \mu\operatorname{sen}\beta) = \mu P \qquad (1)$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Tomando momentos respecto de A



se tiene

$$L\,F\,\text{sen}\,(\beta-\alpha)-L/2\,P\,cos\,\alpha=0 \qquad F\,\text{sen}\,(\beta-\alpha)=P/2\cos\alpha \qquad (2)$$

De (1) y (2) se obtiene

$$\cos\alpha = 2\mu\,\frac{\text{sen}(\beta-\alpha)}{\mu\,\text{sen}\,\beta+\cos\beta}$$

y operando queda la relación pedida

$$\text{tg}\,\beta = 2\,tg\,\alpha + \frac{1}{\mu}$$

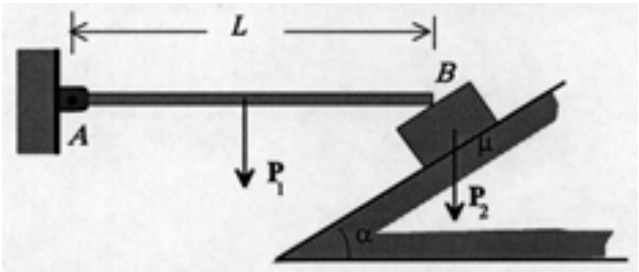
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

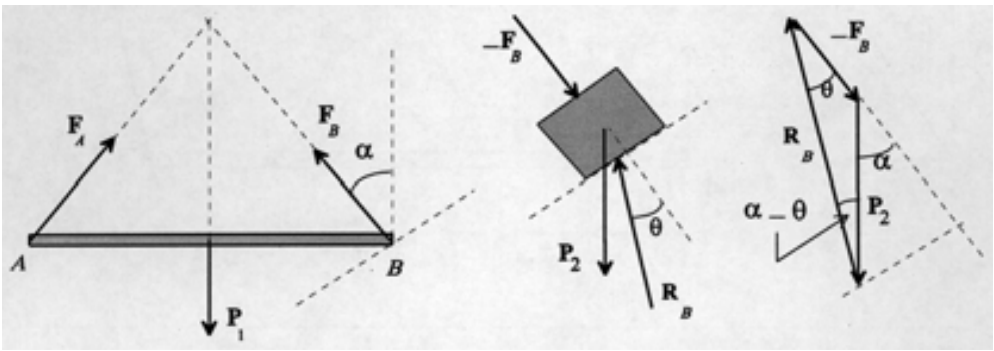
PROBLEMA 6-20

Una barra homogenea de longitud L y peso P_1 está articulada por uno de sus extremos y el otro se apoya sobre la superficie lisa del bloque de peso P_2, el cual está situado sobre un plano inclinado que formsa un ángulo α con la horizontal, tal como se muestra en la figura adjunta. Determinar el coeficiente de rozamiento μ entre el bloque y el plano, necesario para el equilibrio.



SOLUCIÓN

Diagramas del sólido libre de la barra y del bloque



Tomando momentos respecto del punto A en el diagrama del sólido libre de la barra se tiene

$$-P_1 \frac{L}{2} + LF_B \cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad F_B = \frac{P_1}{2\cos\alpha} \tag{1}$$

En el triángulo de fuerzas del bloque se tiene

$$\frac{F_B}{\operatorname{sen}(\alpha - \theta)} = \frac{P_2}{\operatorname{sen}\theta} \tag{2}$$

De (1) y (2) operando se obtiene el valor de μ

$$\mu = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{P_1/P_2 + \cos^2\alpha}$$

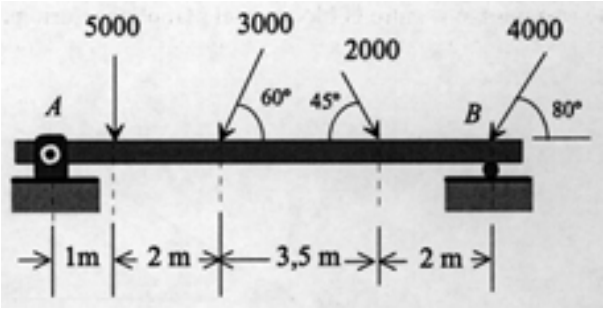
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

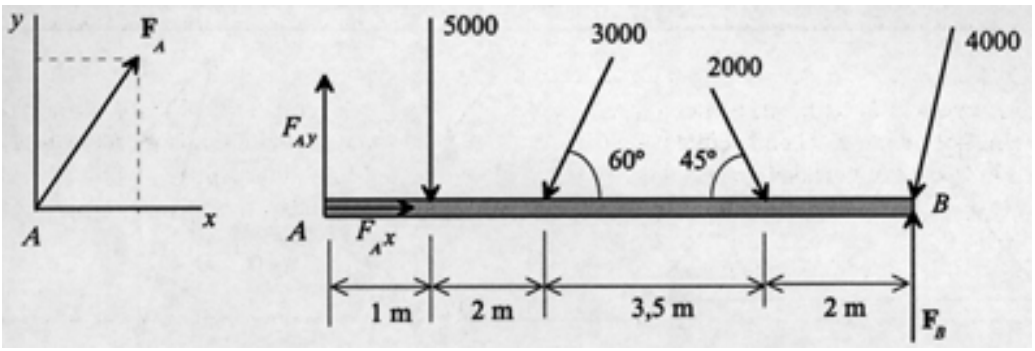
PROBLEMA 6-21

Determinar las reacciones en la articulación *A* y en el apoyo liso *B* que se ejercen sobre la viga de la figura adjunta. Considerar el peso de la viga despreciable frente a la carga, dada en kg.



SOLUCIÓN

Diagrama del sólido libre de la barra



La reacción en la articulación *A* de dirección desconocida se descompone en sus componentes, según el eje *x* en la dirección de la barra y según el eje *y* perpendicular a la barra.
La condición de equilibrio está dada por

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{y} \quad \Sigma F_y = 0$$

que junto a la ecuación de la suma de los momentos respecto de *A* igual a cero, forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas cuya solución proporciona las reacciones pedidas. De la ecuación de los momentos se tiene

$$F_B = 6525{,}9 \text{ kg}$$

y de la suma de las componentes de las fuerzas según el eje *x* y según el eje *y*, se tiene

$$F_{Ax} = 780{,}4 \text{ kg} \qquad \text{y} \qquad F_{Ay} = 6425{,}5 \text{ kg}$$

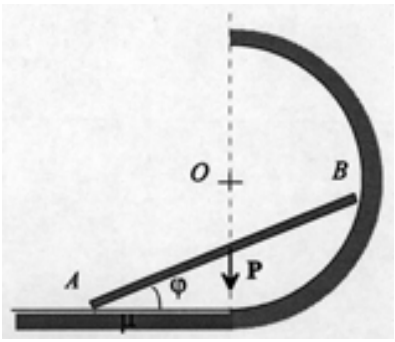
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 6-22

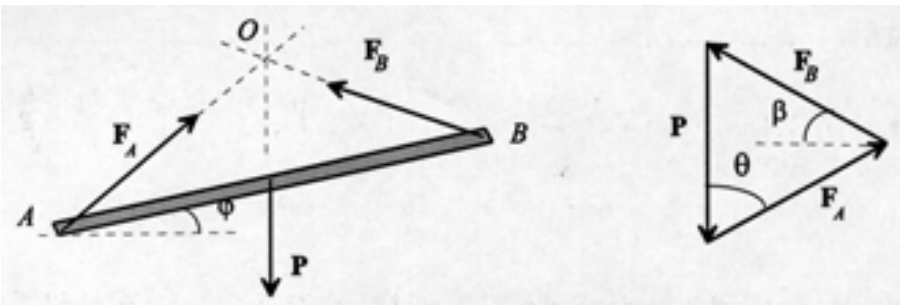
Una barra homogénea *AB* de peso **P** se apoya por su extremo *B* sobre la superficie interior lisa de un semicilindro hueco de radio *R* y por su extremo *A* sobre un suelo horizontal rugoso. La longitud *L* de la barra es $L = 1{,}6\,R$. En la posición de equilibrio límite, el centro de gravedad de la barra está sobre el diámetro vertical del semicilindro. Determinar para dicha posición, la relación el ángulo que forma la barra con la horizontal y el coeficiente de rozamiento μ. y las reacciones en los apoyos.



SOLUCIÓN

Por su extremo *B,* la barra se apoya en la superficie cilíndrica lisa luego la reacción en *B* tiene dirección radial y se corta en *O* con la dirección del peso. En la situación de equilibrio, la reacción en *A* se ha de cortar con las otras dos fuerzas, luego pasa por el punto *O*. En la situación de movimiento inminente, la reacción en *A* forma con la normal un ángulo θ tal que $\text{tg}\,\theta = \mu$.

Diagrama del sólido libre de la barra



Del triángulo de fuerzas se tiene:

$$F_A \,\text{sen}\,\theta = F_B \cos\beta \qquad (1)$$

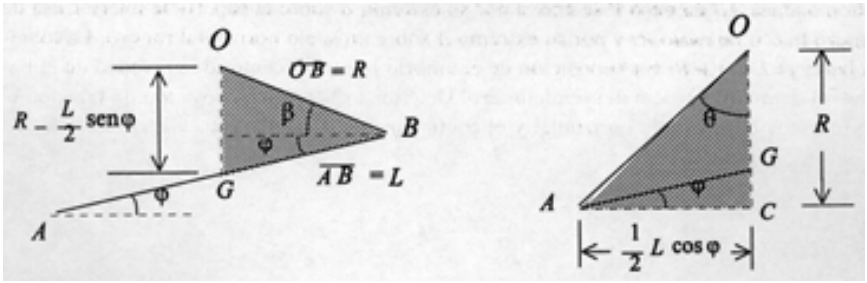
$$F_B \,\text{sen}\,\beta + F_A \cos\theta = P \qquad (2)$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Consideremos los triángulos *OGB* y *OAC* de la figura adjunta.



Del primero se deduce que $$R\cos\beta = \frac{L}{2}\cos\varphi \Rightarrow \cos\beta = \frac{L}{2R}\cos\varphi \qquad (3)$$

y del segundo, teniendo en cuenta que *AO* es la dirección de $\mathbf{F}_A$

$$\mu = \operatorname{tg}\theta = \frac{\frac{1}{2}L\cos\varphi}{R} \qquad (4)$$

y combinando las ecuaciones (3) y (4) resulta

$$\mu = \cos\beta = \frac{L}{2R}\cos\varphi \qquad (5)$$

Aplicando la ley del seno al triángulo *OGB* se tiene

$$\frac{R - \frac{1}{2}L\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}(\beta+\varphi)} = \frac{\frac{1}{2}L}{\cos\beta} \qquad (6)$$

Operando en (6) queda

$$\frac{2R}{L} = \cos\varphi\operatorname{tg}\beta + 2\operatorname{sen}\varphi \text{ de (3)} \Rightarrow 1 = \operatorname{sen}\beta + 2\cos\beta\operatorname{tg}\varphi \text{ de (3)} \Rightarrow \operatorname{sen}\beta = 1 - \frac{L}{R}\operatorname{sen}\varphi$$

De la relación trigonométrica $\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1 \Rightarrow 3\operatorname{sen}^2\varphi - 5\operatorname{sen}\varphi + 1 = 0$

Resolviendo la ecuación de segundo grado resulta $\operatorname{sen}\varphi = 0{,}2333 \Rightarrow \varphi = 13{,}5°$

y sustituyen en la ecuación (5) se obtiene el valor de μ $\mu = 0{,}8\cos\varphi = 0{,}77$

Las ecuaciones (1) y (2) proporcionan los valores de la reacciones

$$F_A = 0{,}77P \quad \text{y} \quad F_B = 0{,}6P$$

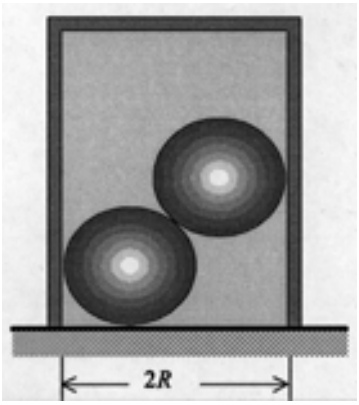
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

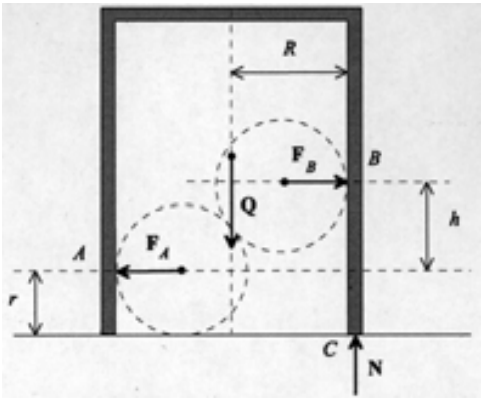
PROBLEMA 6-23

Un cilindro de radio$R$ se opoya boca abajo sobre una superficie horizontal, tal como se muestra en la figura adjunta. En su interior hay dos esferas iguales de radio r y peso P cada una. Determinar el peso Q del cilindro para que este no vuelque. Todas las superficies se consideran lisas.



SOLUCIÓN

Diagrama del sólido libre del cilindro en la situación límite para volcar



Las esferas ejercen fuerzas sobre la pared del cilindro en los puntos de contacto A y B formando un par tal como se indica en la figura anterior. En la situación de vuelco inminente, el cilindro se apoya únicamente en el punto C y el momento del peso del cilindro respecto de C, que tiende a mantener el cilindro en posición vertical, está equilibrado por el momento del par que tiende a volcarlo. Luego para que no vuelque se ha de cumplir que

$$R\,Q \geq h\,F \qquad (1)$$

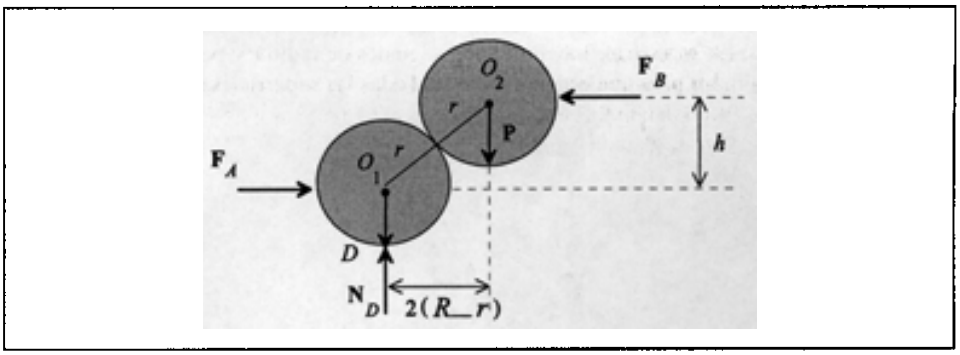
siendo F el módulo de las fuerzas del par. El valor mínimo de Q corresponde al igual.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Diagrama del sólido libre de las dos esferas



Suma de fuerzas igual a cero $\Rightarrow$ $\mathbf{F_A = -F_B = F}$ $\mathbf{N_D = 2P}$

Suma de momentos respecto de O_1 igual a cero $\Rightarrow$ $Fh = 2P(R - r)$ (2)

De (1) y (2) se obtiene

$$Q = 2P\left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

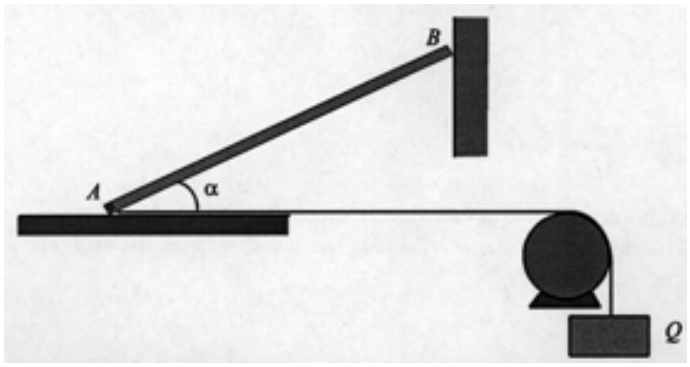
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 6-24

Una barra homogénea de longiitud L y peso **P**, se apoya por su extremo B en una pared vertical rugosa de coeficiente μ y por su extremo A sobre un plano horizontal liso. Su extremo A está unido a un cable, de peso despreciable, que pasa por encima de un cilindro circular fijo (ver figura adjunta) de cuyo extremo pende un peso Q. El coeficiente de rozamiento entre el cable y el cilindro es μ_1. Determinar el intérvalo de valores de α para el equilibrio.

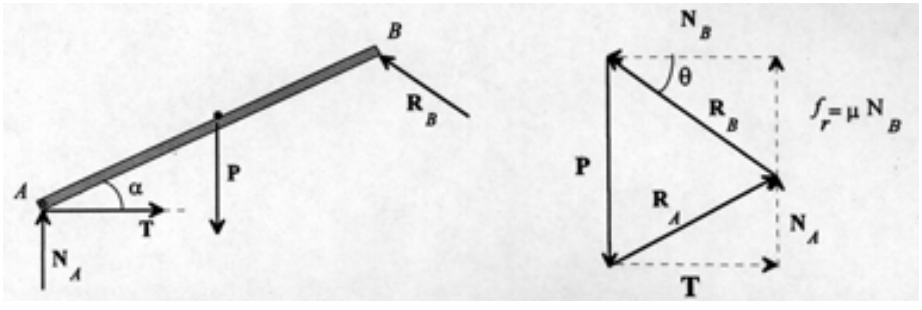


SOLUCIÓN

a) Para el valor mínimo de α , la barra está en situación de movimiento inminente hacia abajo, luego la fuerza de rozamiento en B está dirigida hacia arriba y como tiene su valor máximo, forma con la normal un ángulo tal que $\mu = \text{tg}\,\theta$. El extremo A de la barra tiene tendencia a desplazarse hacia la izquierda, luego la tensión T del cable está relacionada con la carga Q por la ecuación

$$T = Q\, e^{\frac{\pi\,\mu_1}{2}}$$

Diagrama del sólido libre para la barra



© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Del triángulo de fuerzas se deduce que $T = N_B$ y $N_A + \mu N_B = P$

Igualando a cero la suma de momentos respecto de A se tiene

$$-(P\frac{L}{2}\cos\alpha) + N_B L \operatorname{sen}\alpha + f_r L \cos\alpha = 0$$

Operando queda $\operatorname{tg}\alpha_m = \frac{1}{2}\frac{P}{T} - \mu \quad \Rightarrow \quad tg\,\alpha_m = \frac{1}{2}\frac{P}{Q} e^{-\frac{\pi\mu_1}{2}} - \mu$

b) Para el valor máximo de α, la barra está en movimiento inminente hacia arriba, luego la fuerza de rozamiento en B está dirigida hacia abajo. Ahora la tensión T en la cuerda está relacionada con la carga Q por la ecuación

$$T = Q e^{-\frac{\pi\mu_1}{2}}$$

De la ecuación de los momentos respecto de A igual a cero se tiene

$$\operatorname{tg}\alpha_M = \frac{1}{2}\frac{P}{T} + \mu \quad \Rightarrow \quad tg\,\alpha_M = \frac{1}{2}\frac{P}{Q} e^{\frac{\pi\mu_1}{2}} + \mu$$

La barra está en equilibrio para un ángulo α tal que

$$tg\,\alpha_m \leq \alpha \leq tg\,\alpha_M$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

6.15 Equilibrio de armaduras y entramados

Las estructuras articuladas consisten en un conjunto de elementos conectados entre sí en unos puntos denominados nudos. El análisis de la estructura está enfocado a determinar las fuerzas de acción y reacción entre sus elementos bajo la acción de cargas conocidas. Se consideran dos tipos particulares de estructuras: *las armaduras y los entramados*

Armaduras planas. Las armaduras están constituidas por elementos de dos fuerzas capaces de soportar grandes cargas con un peso estructural pequeño. En las *armaduras planas*, todos sus elementos están contenidos en el mismo plano, y todas las cargas aplicadas deben de estar contenidas en el plano de la armadura. Los elementos de la armadura son en general barras delgadas unidas por sus extremos, que sólo pueden soportar pequeñas cargas laterales, por lo que las cargas deben de aplicarse únicamente en los nudos. En realidad, las barras están conectadas mediante uniones roblonadas, remachadas o soldadas a una placa, pero al estudiar su equilibrio, estas uniones se sustituyen por pasadores ideales exentos de rozamiento constituyendo una simplificación aceptable, de lo que resulta que las fuerzas que actúan en cada extremo de una barra se reducen a una única fuerza, sin que exista ningún par.

Frecuentemente en el análisis de las armaduras se desprecia el peso de las barras, hipótesis que resulta aceptable en el caso de armaduras pequeñas. En el caso de armaduras de puente grande se supone que los pesos de las barras están aplicados en los nudos, de tal manera que se aplica la mitad del peso de la barra sobre cada uno de los nudos a los que está conectada. Como resultado de estas hipótesis, cada elemento de la armadura sólo soporta fuerzas en sus extremos y del equilibrio de la barra se deduce que estas fuerzas han de ser fuerzas axiales según se indica en la figura 6-27 a).

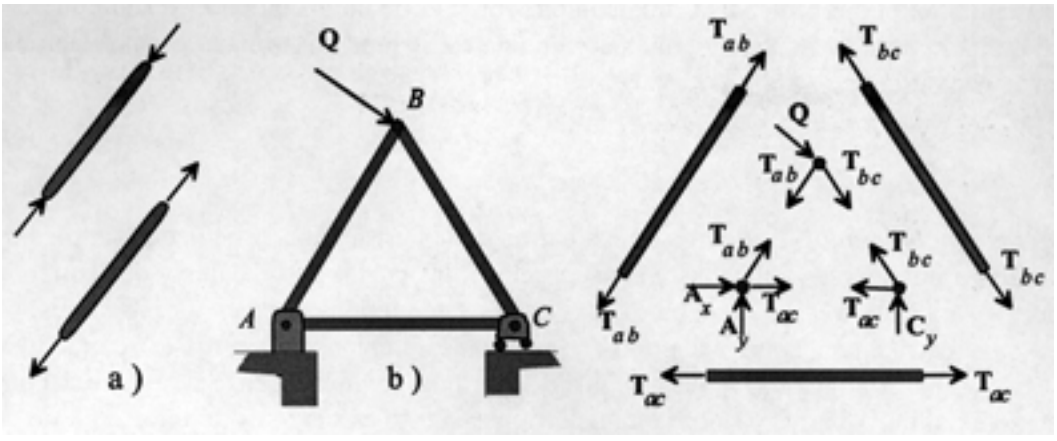


Fig. 6-27

Un determinado elemento de la armadura puede trabajar a tracción o a compresión, según que las fuerzas en sus extremos tiendan a estirar la barra o a acortarla. En su forma más

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

sencilla, una armadura como la representada en la figura 6-27 b) consiste en un conjunto de elementos de dos fuerzas unidos por pasadores sin rozamiento. Para mantener la forma de la armadura al someterla a cargas, las armaduras han de ser estructuras rígidas, y la estructura más sencilla que mantiene su forma, con independencia de como este apoyada, es el triángulo.

Una estructura tal como la representada en la figura 6-28 a) es una estructura rígida ya que al someterla a una carga en B permanecerá prácticamente inalterada en su forma. Podemos ampliar una estructura de este tipo si se añaden dos nuevas barras unidas a nudos diferentes y se conectan sus extremos libres entre si, figura 6-28 b).

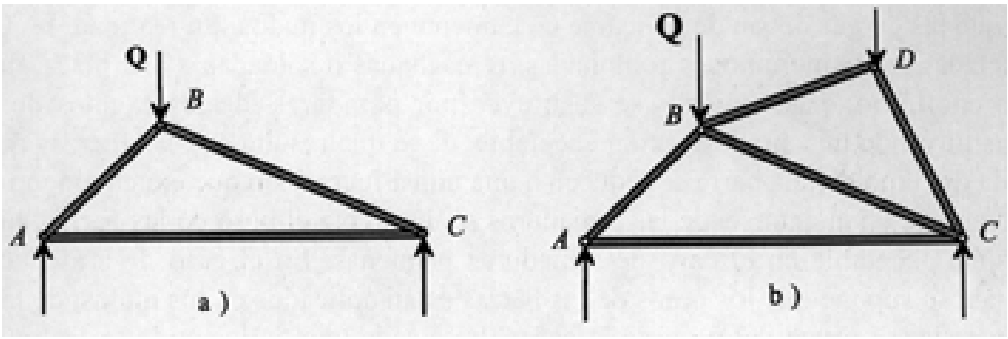


Fig. 6-28

Una estructura construida de esta manera se denomina *armadura simple.* En el proceso de formación de una estructura simple a partir del triángulo base, se observa que por cada nuevo triángulo, el número de barras aumenta en dos y el de nudos en uno. Resulta que el número de barras m y el número de nudos n de una estructura así formada están relacionados por la ecuación

$$m = 2\,n - 3 \qquad (6\text{-}49)$$

Método de los nudos. Cada una de las barras de las estructuras articuladas simples están sometidas a dos fuerzas aplicadas en sus extremos, las cuales son iguales y de sentido contrario y dirigidas a lo largo de la barra. Las barras están unidas entre si por pasadores, y por tanto, cada barra ejerce sobre cada uno de los pasadores colocados en sus extremos, fuerzas de reacción que son iguales, opuestas y dirigidas a lo largo de la barra. Su valor se denomina esfuerzo axial de la barra, y se trata de determinar si este esfuerzo es de tracción o de compresión para cada una de las barras. Los pasadores estarán en equilibrio sometidos a las fuerzas que les ejercen las barras que concurren en cada uno de ellos.

En una estructura formada por m barras tenemos $n = 1/2\ (m + 3)$ nudos y el mismo número de pasadores. Las condiciones de equilibrio de la estructura se establecen mediante las n condiciones de equilibrio de los nudos, imponiendo que las resultantes de las fuerzas en los

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

n nudos son nulas $\mathbf{R}_i = 0$ para $i = 1,2, \ldots\ldots n$. Las *n* ecuaciones vectoriales constituyen un sistema de 2 *n* ecuaciones escalares que permite determinar $m + 3$ incógnitas, proporcionando el valor de los esfuerzos axiales de las barras asi como las componentes de las reacciones en los apoyos. En los nudos pueden concurrir dos o más barras y soportar cargas o estar descargados, dando lugar a situaciones de equilibrio con condiciones excluyentes. Cuando en un nudo concurren dos barras, estas pueden estar alineadas o formando un cierto ángulo. Si están alineadas, el pasador está sometido a un par de fuerzas en su misma dirección y por tanto este nudo no puede soportar ningún tipo de carga, figura 6-29 a). Si forman un cierto ángulo y no hay carga, para que exista equilibrio los esfuerzos axiales deben ser nulos. Estas barras no trabajan y se denominan barras descargadas, figura 6-28 b).

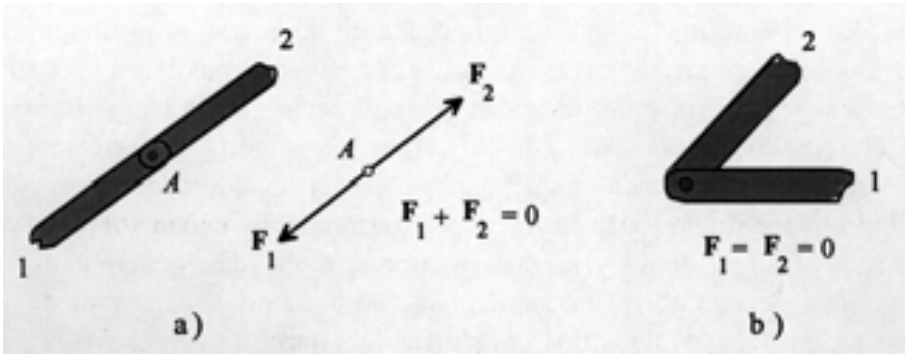


Fig. 6-29

Cuando en un nudo concurren tres barras y no hay carga, la condición de equilibrio del pasador implica que la barra 3 está descargada, figura 6-30 a).

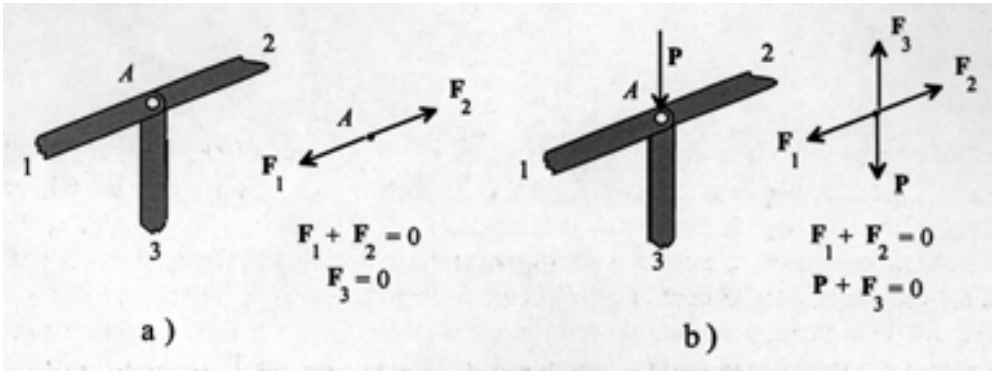


Fig. 6-30

Si en el nudo hay una carga en la dirección de la barra 3 el esfuerzo axial de esta barra es

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

igual a la carga Q, figura 6-30 b). Si la carga **Q** tiene una dirección arbitraria los esfuerzos $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ no son iguales.

Método de las secciones. Cuando en una estructura articulada se pretende determinar únicamente los esfuerzos en un número reducido de barras, el método de los nudos no es el más apropiado ya que implica la determinación de todos los esfuerzos. Se puede eliminar el cálculo de los esfuerzos en las barras que no intervienen si se recurre al método de las secciones. Ya que la estructura en su conjunto está en equilibrio, cada una de sus partes también lo está. Podemos individualizar una sección de la estructura en la cual intervenga la barra de la cual interesa determinar su esfuerzo, prescindiendo del resto de la estructura. La sección se considera como un sólido rígido en equilibrio, al cual se le aplica $\sum \mathbf{F} = 0$ y $\sum \mathbf{M} = 0$, sistema que nos proporcionará el valor del esfuerzo deseado. Este método es útil para determinar esfuerzos en estructuras articuladas compuestas por la unión de estructuras simples.

Entramados. En un entramado, como mínimo una de las barras se prolonga más allá del pasador pudiendo soportar cargas en su extremo libre. Sobre estas barras actuaran más de dos fuerzas que en general no están dirigidas en la dirección de la barra. La condición de equilibrio del entramado bajo la acción de las cargas que soporta se establece imponiendo las condiciones de equilibrio a cada uno de sus elementos, considerados como sólidos libres en equilibrio bajo la acción de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre él. Aparecerán de esta forma todas las reacciones y fuerzas interiores implicadas, generando un cierto número de ecuaciones de equilibrio independientes, en función del número de incógnitas. Como ejemplo de entramado, podemos considerar la estructura representada en la figura 6-31 a).

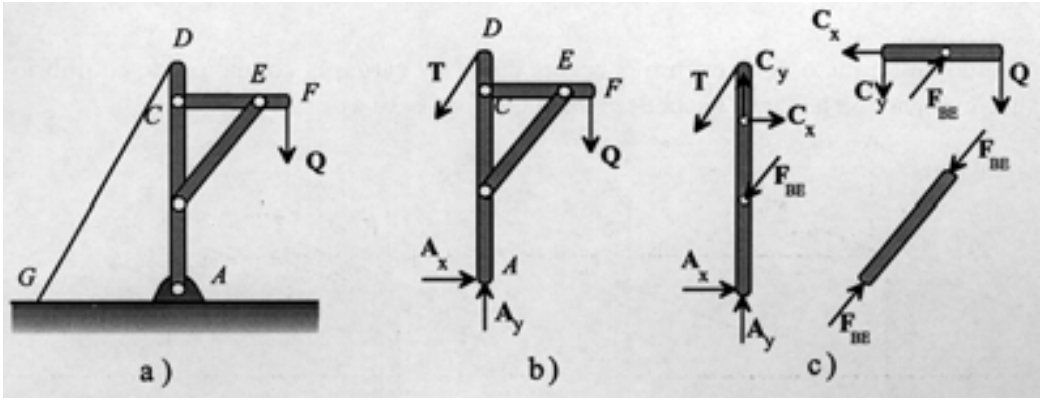


Fig. 6-31

En la figura 6-31b) se representa el equilibrio de la estructura en su conjunto, en la cual no aparecen las fuerzas interiores entre las distintas piezas. Para determinar las fuerzas interiores del entramado, es necesario desmontar éste y dibujar el diagrama del sólido libre de cada uno de los elementos, figura 6-31 c). Las fuerzas que actúan en los extremos de las barras tienen el mismo módulo, la misma recta soporte y sentidos opuestos.

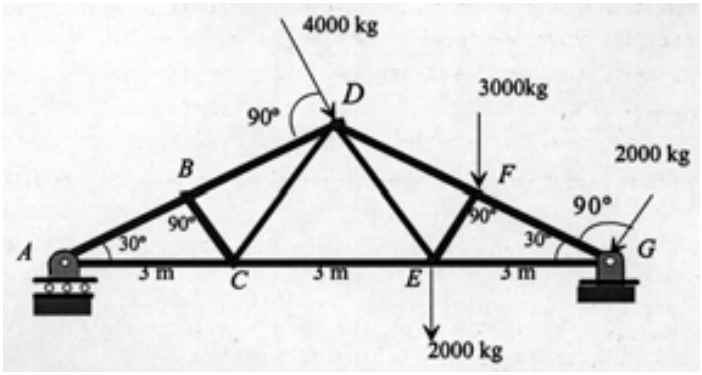
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

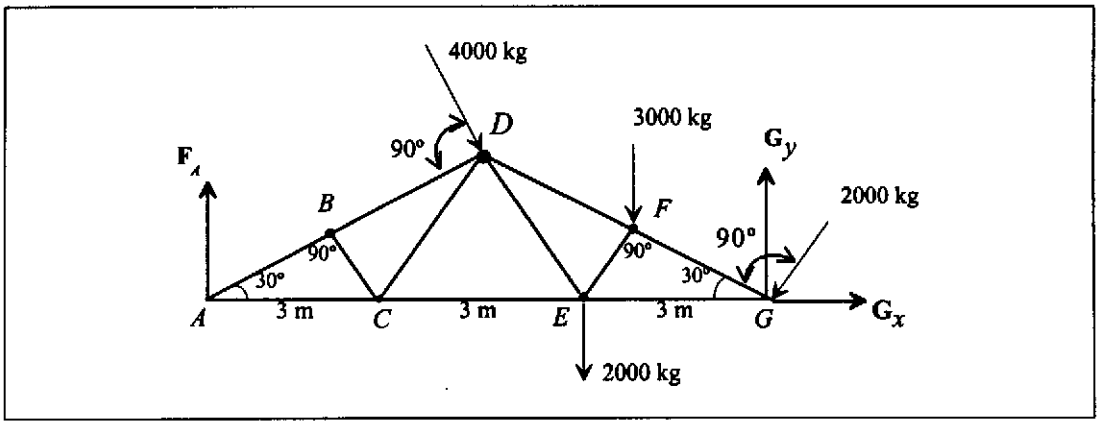
PROBLEMA 6-23

Determinar los esfuerzos axiales en los elementos *BD*, *CD*, *CE* , *DE*, *DF* y *EF* de la estructura de la figura adjunta.



SOLUCIÓN

Primero se determinan las reacciones en los apoyos considerando la estructura como un sólido libre. La reacción en el apoyo liso *A* es vertical y en la reacción desconocida en la articulación *G* se descompone en sus componentes según el eje *x* y el eje *y*.



De la figura se deduce que la distancia $\overline{FG} = 2,6$ m y la distancia $\overline{DG} = 5,2$ m

De la ecuación $\sum F_x = 0 \Rightarrow G_x = 1000$ kg

De la ecuación $\sum M_G = 0 \Rightarrow F_A = 2570$ kg

De la ecuación $\sum F_y = 0 \Rightarrow F_A = 8464 - G_y \Rightarrow G_y = 5894$ kg

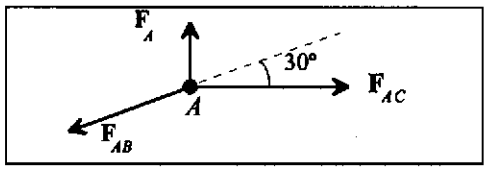
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

En el nudo B concurren tres barras y no hay carga, luego la barra BC no trabaja, es decir, está descargada

Equilibrio en el nudo A. Las fuerzas que actúan sobre el pasador en A se representan en la siguiente figura.

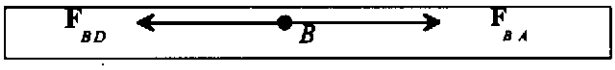


De la condición de equilibrio para el punto A se deduce que las fuerzas de las barras AB y AC sobre el pasador A son :

$$F_{AB} = \frac{F_A}{\cos 60^\circ} = 5140 \text{ kg} \quad \text{y} \quad F_{AC} = F_{AB} \cos 30^\circ = 4451 \text{ kg}$$

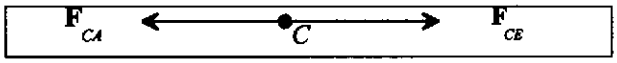
cuyos sentidos son los indicados. Las fuerzas de el pasador sobre las barras son iguales pero de sentidos opuestos, luego la AB trabaja a compresión y la barra AC a tracción.

Equilibrio en el nudo B.



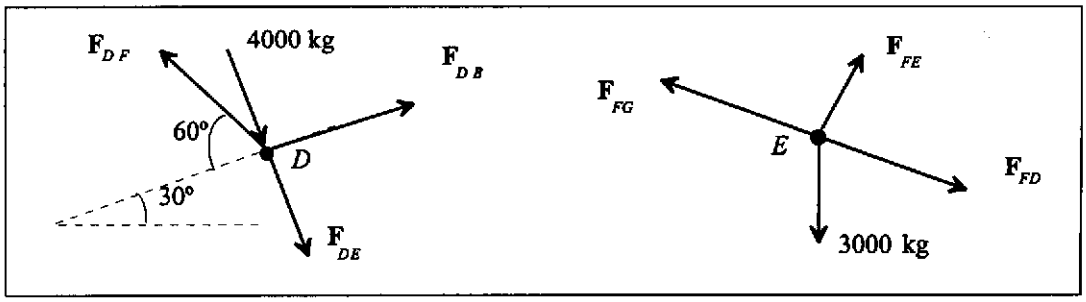
La fuerza sobre la barra BD es $F_{BD} = F_{AB} = 5140 \text{ kg}$ y la barra BD trabaja compresión.

Equilibrio en el nudo C. El nudo C no soporta carga y en él concurren 4 barras, pero la barra BC está descargada $F_{BC} = 0$, y la condición de equilibrio obliga a que la barra CD este descargada $F_{CD} = 0$



La fuerza en la barra CE es $F_{CE} = F_{AC} = 4451$ kg y trabaja a tracción.

Equilibrio en el nudo D y en el nudo E



La carga de 4000 kg es perpendicular BD y la barra DE también forma 90° con la barra BD. De la condición de equilibrio se deduce que $F_{DB} = F_{DF} \cos 60^\circ \Rightarrow F_{DF} = 10280$ kg y $F_{DF} \cos 30^\circ = 4000 + F_{DE} \Rightarrow F_{DE} = 4902$ kg , luego la barra DF trabaja a compresión y la barra DE a tracción.

En el nudo E concurren tres barras y hay una carga de 3000 kg, luego la fuerza sobre el pasador debida a la barra EF vale $F_{FE} = 3000 \cos 30^\circ = 2592$ kg y la barra trabaja a compresión.

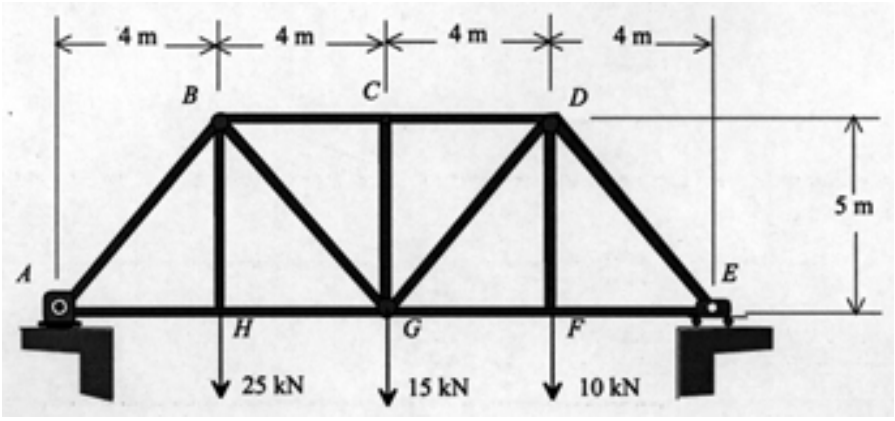
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

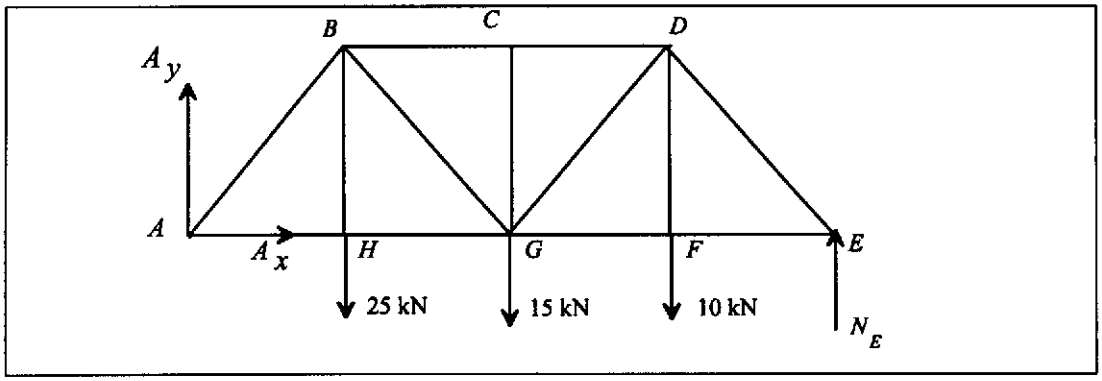
PROBLEMA 6-24

Determinar los esfuerzos axiales en las barras *BC*, *BG* y *GH* de la armadura de puente representada en la figura adjunta.



SOLUCIÓN

Determinemos las reacciones en los apoyos considerando la armadura como un sólido libre.



Tomando momentos respecto de A se obtiene la reacción normal en el apoyo E.

$$\Sigma M_A = -100\,\text{kNm} - 120\,\text{kNm} - 120\,\text{kNm} + 16\,N_E = 0 \Rightarrow N_E = 21250\,N$$

No hay carga en sentido horizontal, luego $A_x = 0$ y de igualar a cero la suma de fuerzas respecto de y queda $A_y = 50$ kN. De la figura se obtiene que el ángulo que forma la barra AB con el eje y está dado por

$$\text{tg}\,\alpha = 0{,}8 \Rightarrow \alpha = 38{,}66^\circ$$

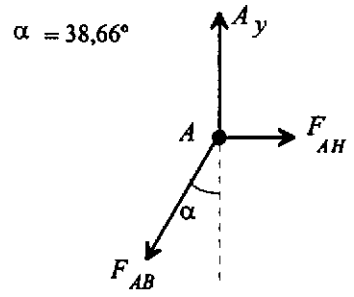
Como en el nudo C no hay carga, la barra CG está descargada.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

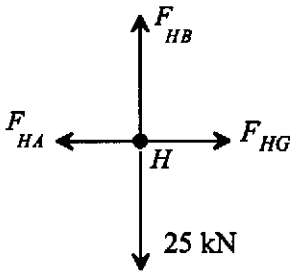
Equilibrio del nudo A.



F_{AB} = 64 kN ; la barra *AB* trabaja a compresión

F_{AH} = 40 kN ; la barra *AH* trabaja a tracción

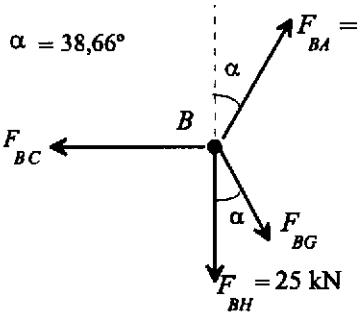
Equilibrio del nudo H.



F_{HG} = 40 kN ; la barra *GH* trabaja a tracción

F_{HB} = 25 kN ; la barra *HB* trabaja a tracción

Equilibrio del nudo B.



F_{BG} = 32 kN ; la barra *BG* trabaja a tracción

F_{BC} = 60 kN ; la barra *AH* trabaja a compresión

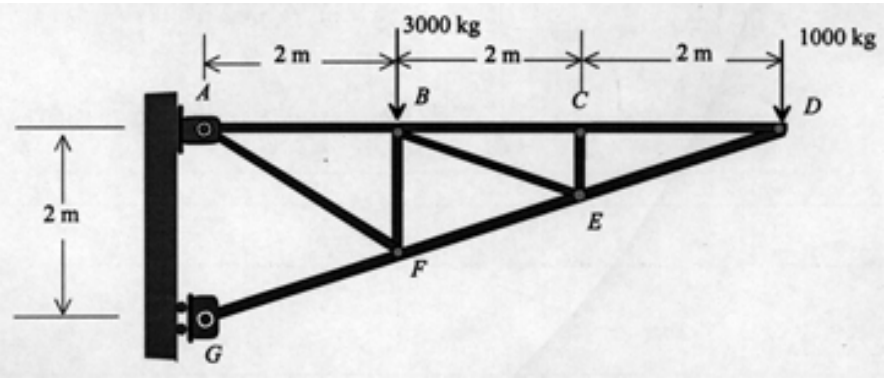
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 6-25

Determinar las fuerzas en todos los elementos de la viga armada en voladizo que se representa esquemáticamente en la figura adjunta.

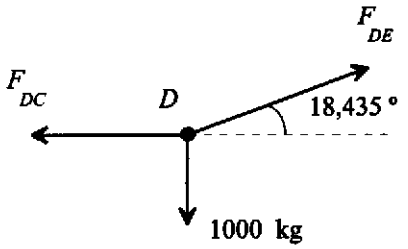


SOLUCIÓN

Del nudo C se deduce que la barra CE no trabaja, y del nudo E que la barra BE tampoco trabaja.. El ángulo de las barras en el nudo D es $\text{tg}\,\alpha_D = 1/3$; $\alpha_D = 18,435°$. De la armadura se deduce que la longitud de la barra BF es $\overline{BF} = 4/3$. El ángulo de las barras en A es

$$\text{tg}\,\alpha_A = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha_A = 33,69°$$

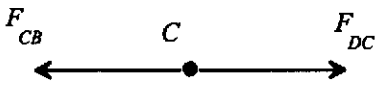
Equilibrio del nudo D



$$F_{DE} = 3162,27$$

$$F_{DC} = 3000$$

Equilibrio en el nudo C



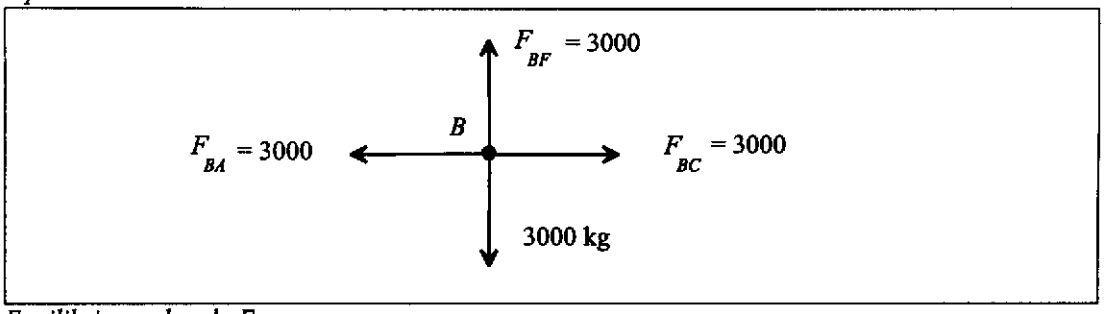
$$F_{CB} = F_{DC} = 3000$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

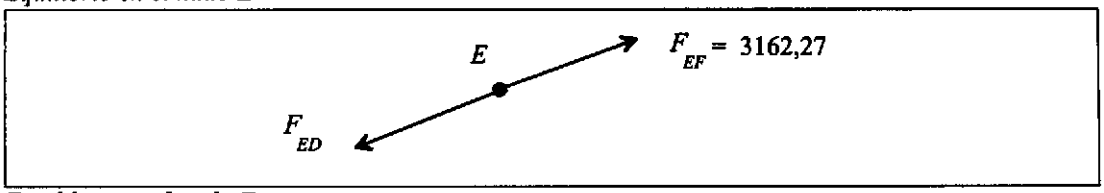
www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

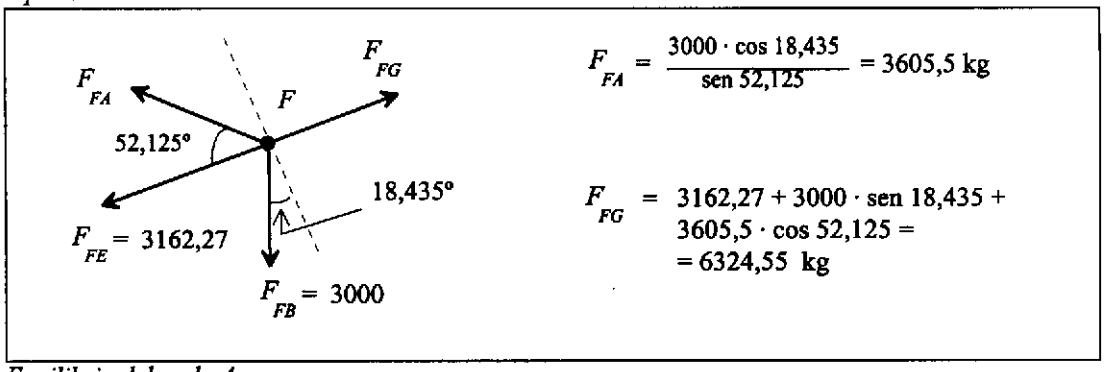
Equilibrio en el nudo B



Equilibrio en el nudo E



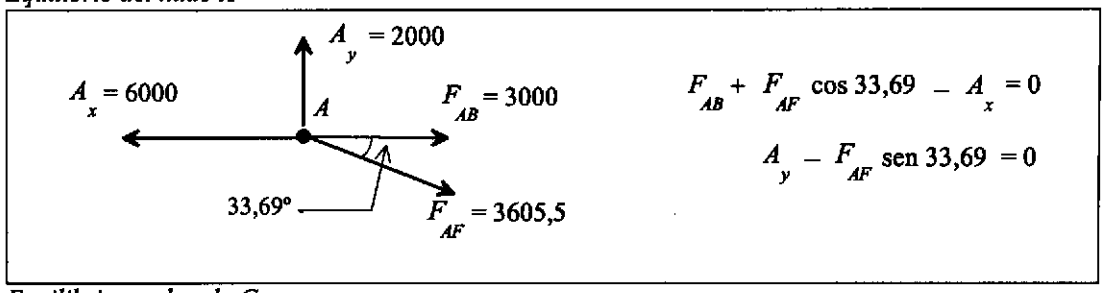
Equilibrio en el nudo F



$$F_{FA} = \frac{3000 \cdot \cos 18,435}{\text{sen } 52,125} = 3605,5 \text{ kg}$$

$$F_{FG} = 3162,27 + 3000 \cdot \text{sen } 18,435 + 3605,5 \cdot \cos 52,125 = 6324,55 \text{ kg}$$

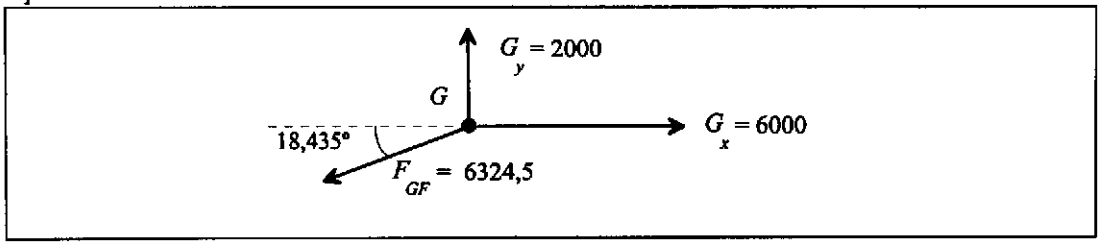
Equilibrio del nudo A



$$F_{AB} + F_{AF} \cos 33,69 - A_x = 0$$

$$A_y - F_{AF} \text{ sen } 33,69 = 0$$

Equilibrio en el nudo G



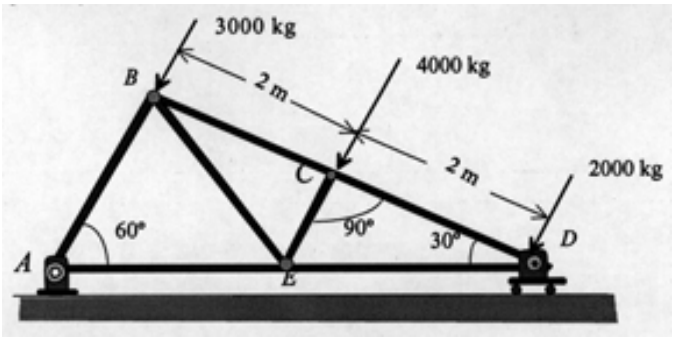
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

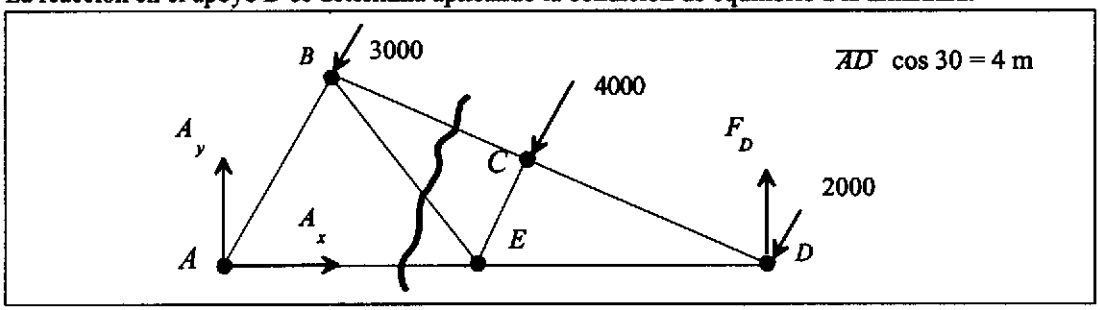
PROBLEMA 6-26

Determinar los esfuerzos axiales de todos los elementos de la estructura esquemáticamente representada en la figura adjunta.



SOLUCIÓN

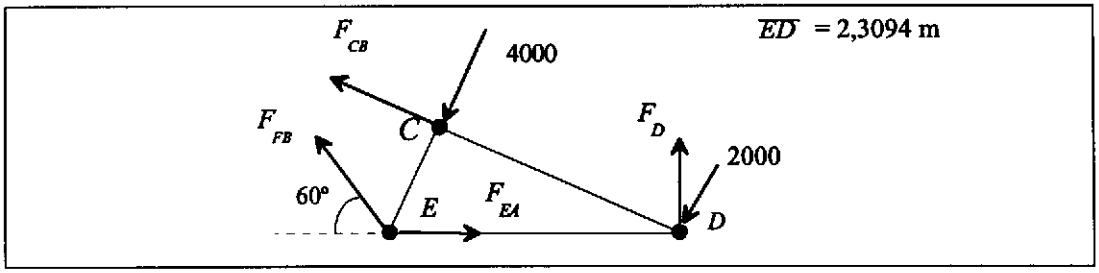
La reacción en el apoyo D se determina aplicando la condición de equilibrio a la armadura.



$$\sum \mathbf{M}_A = 0 \qquad -8000 - 8000 + F_D\,\overline{AD} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_D = 3464 \text{ kg}$$

Método de las secciones

Tomamos la parte derecha del corte de la figura anterior.



$$\sum \mathbf{M}_E = 0 \qquad -4000 + F_D\,\overline{ED} + F_{CB}\,\overline{EC} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CB} = -3464 \text{ kg}$$

$$\sum \mathbf{M}_D = 0 \qquad 8000 - \overline{ED}\,F_{EB}\,\text{sen}\,60^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{EB} = 4000 \text{ kg}$$

$$\sum \mathbf{F}_X = 0 \qquad F_{EA} - 3000 - 2000 + 3000 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{EA} = 2000 \text{ kg}$$

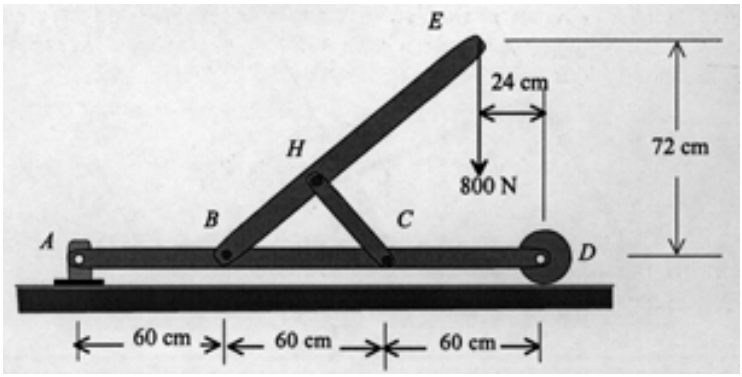
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

PROBLEMA 6-27

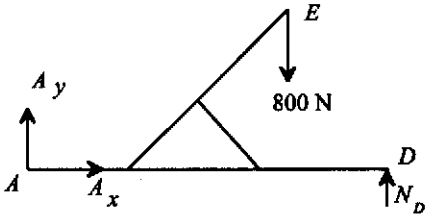
Determinar las fuerzas que se ejercen sobre la barra *ABCD* del entramado representado en la figura adjunta.



SOLUCIÓN

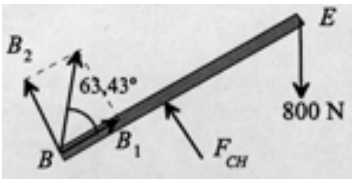
De la figura se deduce que la barra BE tiene una longitud de $\overline{BE} = \sqrt{72^2 + 96^2} = 120$ cm y forma con la horizontal un ángulo dado por $\text{tg}\,\alpha = 72/96 \Rightarrow \alpha = 36{,}87°$. La longitud BH es $\overline{BH} = 60 \cos 36{,}87 = 48$ cm

Apliquemos la condición de equilibrio para el entramado considerado como un sólido libre.



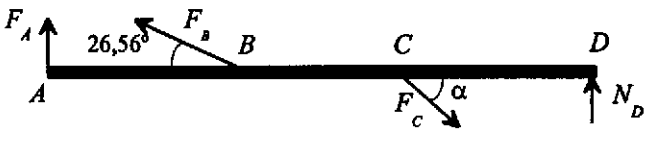
$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow (-1{,}56)\,800 + 1{,}8 N_D = 0$$
$$N_D = 693{,}33 \text{ N}$$
$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow A_y = 106{,}66 \text{ N}$$

Equilibrio de la barra *BE*.



$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow (-120)\,640 + 48 F_{CH} = 0 \quad F_{CH} = 1600 \text{ N}$$
$$\Sigma F_1 = 0 \rightarrow B_1 = 480 \text{ N}$$
$$\Sigma F_2 = 0 \rightarrow B_2 = -960 \text{ N}$$

Fuerzas sobre la barra *ABCD*.



$$\mathbf{F}_A = 106{,}66\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F}_B = -960\,\mathbf{i} + 480\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F}_C = 960\,\mathbf{i} - 1280\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{N}_D = 693{,}33\,\mathbf{j}$$

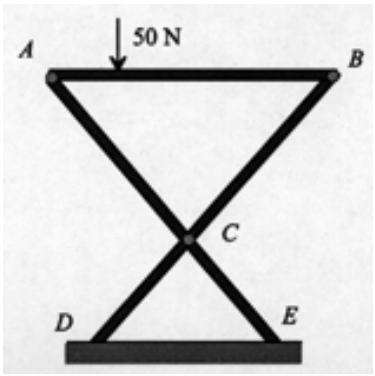
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

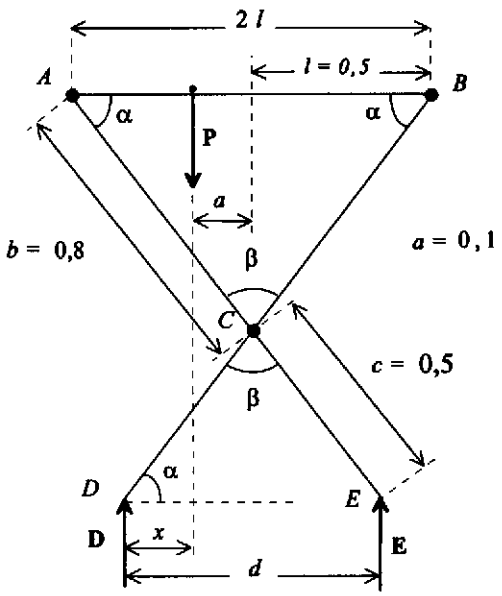
www.elsolucionario.net

PROBLEMA 6-28

La estructura articulada de la figura está constituida por una barra AB de 1 m. de longitud y dos barras iguales AE y BD de 1,3 m. de longitud. Estas barras están articuladas en el punto C siendo AC y BC iguales a 0,8 m. Se ejerce una fuerza vertical y hacia abajo de 50 N a una disntancia de 10 cm. a la izquierda del punto medio de la barra AB. Calcular: a) las reacciones en los apoyos D y E ; b) las fuerzas ejercidas en las articulaciones A y C sobre la barra AE .



SOLUCIÓN



Para el sistema $\sum \mathbf{F} = 0$ $\quad \mathbf{D} + \mathbf{E} - \mathbf{P} = 0$ (1)

$\sum \mathbf{M}_D = 0$ $\quad -\mathbf{P}\,x + \mathbf{E}\,d = 0$ (2)

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

en donde $x = d/2 - a$

Cálculo de d. Empleando la ley del seno en el triángulo *DCE* se tiene $\frac{d}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\alpha}$

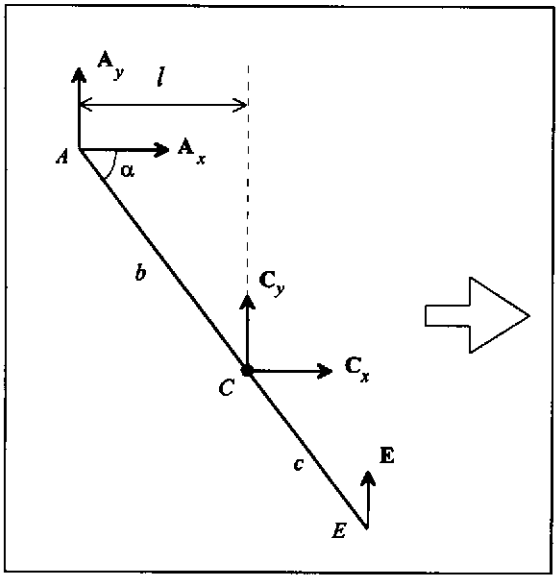
y en el triángulo *ACB* $\frac{2l}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{b}{\operatorname{sen}\alpha}$

de donde $\frac{d}{2l} = \frac{c}{b}$ $\qquad d = \frac{5}{8}$ m.

Para *x* queda $x = 5/16 - 1/10 = 17/80$ m.

De (2) $E = (x/d)\,P = 17$ N y de (1) $D = 33$ N

Fuerza en las articulaciones

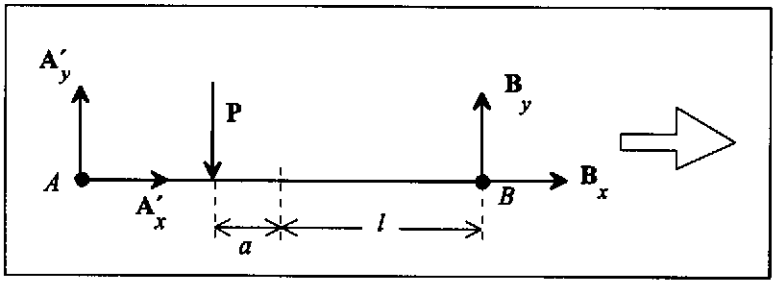


$$\sum \mathbf{F} = 0 \qquad \left\{ \begin{array}{c} A_x + C_x = 0 \\ A_y + C_y + E = 0 \end{array} \right\}$$

$$\sum \mathbf{M}_A = 0$$

$$E\left(l + \tfrac{d}{2}\right) + C_y\, b\cos\theta + C_x\, b\,\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$A_x = -A'_x$$
$$A_y = -A'_y$$



$$\sum \mathbf{M}_B = 0$$

$$(-2l)A'_y + (l+a)P = 0$$

$$A'_y = 30 \text{ N}.$$

Para C_y tenemos: $C_y = 13$ N, $C_x = -A_x = -32{,}5$ N

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Capítulo 7 Trabajo virtual y equilibrio

7.1 Introducción

Los problemas de equilibrio estático de sólidos o estructuras puede ser enfocado mediante un procedimiento distinto del hasta ahora utilizado, basado en las ecuaciones de equilibrio. Este nuevo método para el estudio del equilibrio, precisa para su formulación de la definición del concepto de *trabajo* de una fuerza. Como veremos, para ciertos problemas de estática, éste método resulta mucho más útil que el del *sólido libre* en el que las ecuaciones de equilibrio se obtienen igualando a cero la suma de fuerzas y la suma de momentos que actúan sobre el sistema .

7.2 Trabajo de una fuerza

La definición mecánica de *trabajo* está asociada al desplazamiento diferencial de una fuerza en el espacio. Sea P el punto de aplicación de una fuerza, el cual queda definido respecto del origen O de una referencia por el extremo del vector posición $\mathbf{r}$, figura 7-1. La posición de un punto cualquiera del espacio infinitamente próximo a P, está definida por el extremo del vector $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ siendo $d\mathbf{r}$ incremento diferencial de posición al pasar de un punto a otro, incremento que se denomina *desplazamiento infinitesimal o diferencial* del punto P.

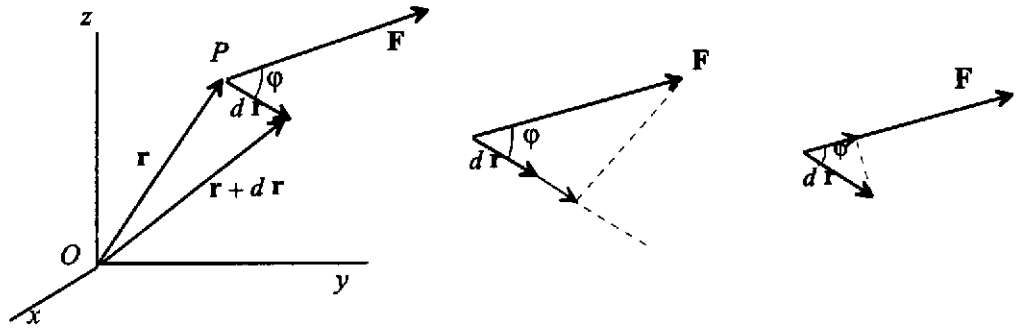


Fig. 7-1

Cuando bajo la acción de la fuerza $\mathbf{F}$ el punto P se desplaza un $d\mathbf{r}$, se define el trabajo de la fuerza $\mathbf{F}$ correspondiente al desplazamiento $d\mathbf{r}$ como el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento. Está definición es una caso particular del concepto matemático de *circulación de un vector*, operación asociada al producto escalar de una función vectorial por el

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

elemento lineal de espacio. De la definición de trabajo se tiene que

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F\, dr \cos\varphi \qquad (7\text{-}1)$$

Si F y dr son los módulos de los dos vectores, desarrollando el producto escalar queda la expresión indicada en la ecuación (7-1). El trabajo es una magnitud escalar cuya unidad se obtiene de multiplicar la unidad de fuerza por la unidad de longitud. En el S.I. la unidad de trabajo N.m se denomina *Julio* (J).

De la definición se deduce que el trabajo puede ser positivo, negativo o nulo, según que el ángulo φ sea agudo, obtuso o recto. Descomponiendo la fuerza en una componente paralela al desplazamiento y en otra perpendicular, podemos expresar el trabajo como *el producto escalar del desplazamiento por la componente de la fuerza en esa dirección.*

El trabajo, también puede ser considerado como el producto de **F** por la componente del desplazamiento según la dirección de **F**. Supongamos ahora que una partícula situada en el punto *P,* sometida a la acción de un conjunto de fuerzas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ... $\mathbf{F}_n$, efectúa un desplazamiento $d\mathbf{r}$. Como el trabajo es una magnitud algebraica, el trabajo total de las n fuerzas, es la suma de los trabajos de cada una ellas

$$dW = \left(\sum_i^n \mathbf{F}_i \right) \cdot d\mathbf{r} \qquad (7\text{-}2)$$

Consideremos ahora desplazamientos diferenciales asociados a sólidos rígidos. Veamos primero que el trabajo total de las fuerzas internas que mantienen unidas las partículas de un sólido rígido es nulo. En efecto, dos partículas cualesquiera de un sólido se ejercen fuerzas, del mismo módulo, de la misma dirección y de sentidos opuestos, figuras 7-2 a). En el caso general de un cambio diferencial de posición del sólido, los desplazamientos de las dos partículas son diferentes, pero sus componentes sobre la dirección definida por las dos partículas han de ser iguales, ya que en caso contrario la distancia entre ambas variaría en contra de la hipótesis de que el sólido es rígido y mantiene inalterable la distancia entre sus puntos. Por tanto, el trabajo de $\mathbf{F}_i$ es igual y de signo contrario al de $\mathbf{F}_j$ y su suma es igual a cero.

Sobre el sólido pueden actuar fuerzas exteriores y pares. Evaluemos el trabajo asociado a un par de fuerzas correspondiente a un desplazamiento diferencial del sólido. Si el desplazamiento es una traslación infinitesimal, el trabajo del par es cero; así pues, calculemos el trabajo del par cuando el desplazamiento es un giro diferencial. Sea el par de fuerzas representado en la figura 7-2 b) aplicadas en los puntos A y B del sólido, el cual efectúa un giro de tal manera que el punto A no se mueve y el punto B pasa a ocupar el punto extremo del desplazamiento $d\mathbf{s}$. Únicamente la fuerza **F** del par realiza trabajo, cuyo valor es $dW = F\, ds$.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

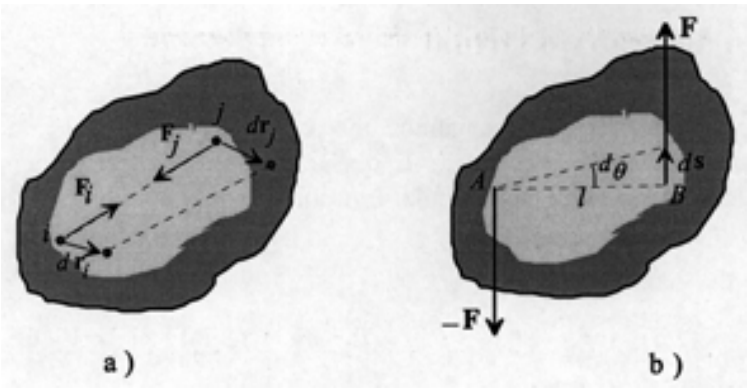


Fig. 7-2

El módulo del desplazamiento diferencial es $ds = l\, d\theta$ y el producto $F\, l$ es el módulo M del momento del par, luego sustituyendo ds por su valor, el trabajo del par viene dado por

$$dW = M\, d\theta \tag{7-3}$$

donde $d\theta$ es el ángulo diferencial girado por el sólido. Cuando el sólido gira en el espacio, como los giros infinitesimales tienen carácter vectorial, el trabajo del par estará dado por $dW = M \cos\varphi\, d\theta$ donde φ es el ángulo que forman el momento del par **M** y el eje de giro. Ya que el trabajo es una magnitud escalar, cuando sobre un sólido rígido actúan un sistema de fuerzas y pares exteriores, el trabajo efectuado por el conjunto de fuerzas aplicadas al sólido en un desplazamiento diferencial del sólido, será la suma algebraica de los trabajos efectuados por cada una las fuerzas y pares individuales.

Trabajo virtual. Si el sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo produce un desplazamiento diferencial del mismo tal como el descrito, el cuerpo no está en equilibrio. Como se ha visto en las secciones anteriores, cuando un cuerpo está en equilibrio, el conjunto de fuerzas y pares que actúa sobre él es un conjunto equilibrado y por tanto no puede producir un desplazamiento lineal infinitesimal del cuerpo. Para poder utilizar la definición de trabajo en el estudio del equilibrio de los cuerpos, es necesario introducir desplazamientos ficticios a los cuales se les llama *desplazamientos virtuales.* Un desplazamiento virtual diferencial arbitrario se representa por $\delta\mathbf{r}$, para indicar que dicho desplazamiento no existe realmente y poder distinguirlo del desplazamiento diferencial real $d\mathbf{r}$. El desplazamiento virtual puede ser también de rotación. A la rotación virtual angular diferencial se le designa por $\delta\theta$. Cambiando en las ecuaciones (7-1) y (7-3) los desplazamientos reales por desplazamientos virtuales, se obtienen las ecuaciones que definen el trabajo virtual de una fuerza y de un par

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r} = F\, \delta l \cos\varphi \qquad \delta W = M\delta\theta \tag{7-4}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

7.3 Método del trabajo virtual

Equilibrio de una partícula. Supongamos una partícula que se encuentra en equilibrio bajo la acción de n fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots\ldots \mathbf{F}_n$ que actúan sobre ella. Imaginemos un desplazamiento virtual arbitrario $\delta\mathbf{r}$ de la partícula. El trabajo virtual de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula es

$$\delta W = \mathbf{F}_1 \cdot \delta\mathbf{r} + \mathbf{F}_2 \cdot \delta\mathbf{r} + \cdots + \mathbf{F}_n \cdot \delta\mathbf{r} = (\Sigma \mathbf{F}_i) \cdot \delta\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r} \qquad (7\text{-}5)$$

donde $\mathbf{F}$ es la resultante de las fuerzas dadas, que es nula ya que la partícula está en equilibrio. Para una partícula, el principio del trabajo virtual establece que, *si una partícula se encuentra en equilibrio, el trabajo virtual de todas las fuerzas que actúan sobre ella es nulo*, enunciado cuya expresión matemática es la ecuación (7-5). Esta es una condición necesaria y suficiente. En efecto, si hay equilibrio, $\mathbf{F}$ es nula y el trabajo virtual es cero y si el trabajo virtual es cero, como $\delta\mathbf{r}$ es arbitrario, del producto escalar $\mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{r} = 0$ se deduce que $\mathbf{F}$ debe de ser nula. La aplicación del principio del trabajo virtual para el equilibrio de una partícula no proporciona una simplificación del problema, ya que δr aparece en todos los términos y por tanto se elimina, quedando las ecuaciones de equilibrio obtenidas de igualar a cero las componentes de las fuerzas según los ejes de coordenadas.

Equilibrio de un solidó. Consideremos ahora el equilibrio de un sólido rígido. En el cálculo del trabajo virtual sólo interviene el trabajo virtual de las fuerzas exteriores, ya que el trabajo virtual de las fuerzas interiores es nulo. En el caso del sólido rígido, el principio del trabajo virtual establece que, *el trabajo virtual de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre el sólido es nulo.* Tampoco para el sólido rígido, el principio de los trabajos virtuales presenta ventaja alguna respecto del método convencional.. El desplazamiento virtual asociado a un movimiento lineal o angular está incluido en cada uno de los sumandos de la ecuación $\delta W = 0$, lo que proporciona una de las ecuaciones obtenidas por el método convencional de igualar a cero las fuerzas o los momentos. La ventaja de emplear el método de los trabajos virtuales se pone de manifiesto en los problemas de equilibrio de sistemas en los que intervienen varios sólidos interconectados

7.4 Equilibrio de sistemas ideales

El sistema mecánico formado por varios sólidos unidos entre sí por conexiones sin rozamiento, se denomina *sistema mecánico ideal.* Los dispositivos en los que intervienen poleas y cuerdas, son sistemas ideales mientras que la cuerda sea inextensible y no deslice sobre la polea. En las conexiones aparecen pares de fuerzas del mismo módulo, la misma dirección y sentidos opuestos. Al aislar el conjunto de la estructura mediante el diagrama del sólido libre, las fuerzas en las conexiones son fuerzas interiores, y por tanto, el trabajo total

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

realizado por las fuerzas interiores es nulo. Luego, el principio de los trabajos virtuales aplicable a un sistema ideal establece que, *el trabajo virtual de todas las fuerzas exteriores que actúan sobre un sistema ideal es nulo para cualquier desplazamiento compatible con las conexiones.*

Al aislar el sistema, las fuerzas exteriores existentes en uniones fijas, realizan trabajo nulo en un desplazamiento virtual compatible con las ligaduras. Tampoco realizan trabajo las reacciones en apoyos lisos para desplazamientos virtuales perpendiculares a las reacciones. A este tipo de fuerzas se les denomina *fuerzas reactivas* para distinguirlas de las fuerzas que sí realizan trabajo, llamadas *fuerzas activas.* Así pues, a diferencia del diagrama del sólido libre en el que se incluyen todas las fuerzas exteriores, en el método de los trabajos virtuales sólo es necesario incluir las fuerzas activas, que son las únicas que intervienen en la ecuación $\delta W = 0$.

La configuración de un sistema viene determinada por el número de grados de libertad del sistema. A cada grado de libertad le corresponde una coordenada, por tanto el número de coordenadas independientes necesario para determinar unívocamente la configuración de un sistema, es igual al número de grados de libertad del sistema. El número de desplazamientos virtuales posibles de un sistema compatibles con las conexiones, es igual a su número de grados de libertad. En la mayoría de problemas de equilibrio el sistema tiene un sólo grado de libertad y por tanto, mediante una única coordenada se especifica la configuración del sistema, interviniendo en su solución, una sola la ecuación $\delta W = 0$ correspondiente al desplazamiento virtual único del sistema. Si el sistema tiene n grados de libertad hay que plantear n veces la ecuación $\delta W = 0$ correspondiente a los n desplazamientos virtuales posibles; cada una de las ecuaciones expresa el trabajo virtual nulo de las fuerzas activas para un desplazamiento virtual determinado, considerando nulos los restantes.

Puede verse claramente que, las ventajas del trabajo virtual sobre el método convencional de las ecuaciones de equilibrio consisten en : primero, se puede prescindir de todas las reacciones desconocidas en las ligaduras y apoyos para establecer las relaciones existentes entre las fuerzas activas y segundo, estas relaciones se consiguen sin necesidad de descomponer el sistema. Debido a estas ventajas, el método del trabajo virtual es especialmente útil para determinar la posición de equilibrio de un sistema bajo la acción de cargas conocidas. Sin embargo, hay que hacer notar que si las relaciones geométricas que permiten la determinación de los desplazamientos virtuales para las diferentes fuerzas que interviene no son sencillas, la utilización de los trabajos virtuales pierde su utilidad y es preferible recurrir al método convencional.

Ejemplo nº 1. Veamos un ejemplo de aplicación del método de los trabajos virtuales. Consideremos la palanca articulada de la figura 7-3 a). Supongamos que se quiere determinar la fuerza $\mathbf{F}_1$ sobre el bloque C, el cual puede deslizar sin rozamiento sobre el apoyo, para que su posición, definida por el ángulo θ, no cambie al aplicar una carga $\mathbf{Q}$ en la articulación B y un momento $\mathbf{M}$ a la barra AB. El desplazamiento virtual del bloque C define unívocamente los desplazamientos de las barras del sistema, luego éste tiene un grado de libertad y su configuración queda determinada por la coordenada θ. La figura 7-3 b) es el diagrama del sistema en donde sólo se incluyen las fuerzas activas.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

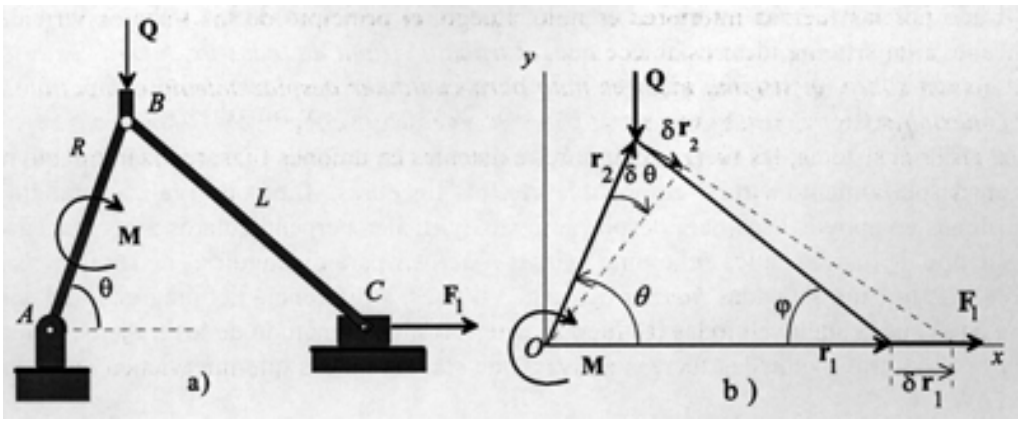


Fig. 7-3

En el sistema de referencia indicado en la figura 7-3 b), las fuerzas activas en componentes son: $\mathbf{F}_1 = F_1\,\mathbf{i}$, $\mathbf{Q} = -Q\,\mathbf{j}$ y $\mathbf{M} = -M\,\mathbf{k}$. Los puntos de aplicación de las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{Q}$ están definidos por los vectores $\mathbf{r}_1 = x_1\,\mathbf{i}$ y $\mathbf{r}_2 = x_2\,\mathbf{i} + y_2\,\mathbf{j}$ respectivamente. Los correspondientes desplazamientos virtuales de las fuerzas serán $\delta\mathbf{r}_1 = \delta x_1\,\mathbf{i}$ y $\delta\,\mathbf{r}_2 = \delta x_2\,\mathbf{i} + \delta y_2\,\mathbf{j}$ y el correspondiente al par, el giro $-\delta\theta\,\mathbf{k}$. Aplicando el principio de los trabajos virtuales queda

$$\delta W = \mathbf{F}_1 \cdot \delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{Q} \cdot \delta\mathbf{r}_2 + \mathbf{M} \cdot (-\delta\theta)\mathbf{k} = F_1\,\delta x_1 - Q\,\delta y_2 + M\,\delta\theta = 0 \qquad \text{(a)}$$

De la figura 7-3 b) se tienen las coordenadas de los puntos de aplicación de las fuerzas están dadas por $x_1 = R\cos\theta + L\cos\varphi$, $y_2 = R\,\text{sen}\,\theta$ y la relación $L\,\text{sen}\,\varphi = R\,\text{sen}\,\theta$. Diferenciando las dos primeras ecuaciones y teniendo en cuenta la relación entre los ángulos θ y φ queda,

$$\delta x_1 = R\,\text{sen}\,\theta\left(1 + \frac{R\cos\theta}{\sqrt{L^2 - R^2\,\text{sen}^2\,\theta}}\right)\delta\theta \qquad \text{(b)}$$

$$\delta y_2 = -R\cos\theta\,\delta\theta \qquad \text{(c)}$$

Sustituyendo (b) y (c) en (a) y despejando, se obtiene

$$F_1 = -\frac{(QR\cos\theta + M)\sqrt{L^2 - R^2\,\text{sen}^2\,\theta}}{R\,\text{sen}\,\theta\left[R\cos\theta + \sqrt{L^2 - R^2\,\text{sen}^2\,\theta}\right]} \qquad \text{(d)}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

El valor negativo de la ecuación (d) para la componente según el eje x de la fuerzas $\mathbf{F}_1$ indica que el sentido de la fuerza es hacia la izquierda.

Ejemplo nº 2. Veamos otro ejemplo de aplicación del método del trabajo virtual. Al brazo OA fijo en O se le aplica un momento M tal como se indica en la figura 7-4 a). Se quiere determinar la fuerza $\mathbf{F}$ que hay que aplicar en la corredera lisa B para que el brazo OA se mantenga en posición horizontal.

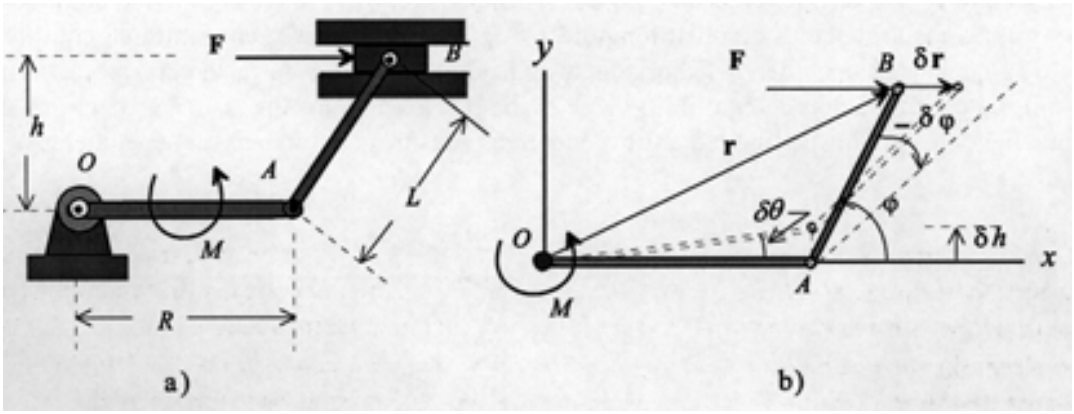


Fig. 7-4

El desplazamiento virtual de la deslizadera define unívocamente los desplazamientos correspondientes del brazo y de la biela compatibles con las ligaduras, tal como se muestra en la figura 7-4 b) del diagrama del sistema, en el que sólo se muestran la fuerza $\mathbf{F}$ y el momento $\mathbf{M}$. La fuerza $\mathbf{F}$ en la referencia indicada está dada por $\mathbf{F} = F\,\mathbf{i}$ y $\mathbf{M} = M\,\mathbf{k}$. Del diagrama de las fuerzas activas se deduce que el vector posición $\mathbf{r}$ en componentes está dado por $\mathbf{r} = (R + L\cos\varphi)\,\mathbf{i} + h\,\mathbf{j}$. El desplazamiento virtual de la deslizadera en componentes es $\delta\,\mathbf{r} = L\,\text{sen}\,\varphi\,\delta\varphi\,\mathbf{i} + \delta h\,\mathbf{j}$ y el del par, el giro $\delta\theta\,\mathbf{k}$. Aplicando el principio de los trabajos virtuales queda

$$\delta W = \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r} + \mathbf{M}\cdot\delta\theta\,\mathbf{k} = FL\,\text{sen}\,\varphi\,\delta\varphi + M\,\delta\theta = 0 \qquad \text{(a)}$$

Para poder resolver la ecuación (a) hay que determinar una relación entre $\delta\theta$ y $\delta\varphi$. El desplazamiento lineal del par es $\delta h = R\,\theta$ y de la geometría del sistema se tiene $h = L\,\text{sen}\varphi$ cuya diferencial es $\delta h = -L\cos\varphi\,\delta\varphi$ Igualando ambas expresiones queda

$$\delta\theta = -\frac{L}{R}\cos\theta\,\delta\varphi \qquad \text{(b)}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Sustituyendo (b) en (a) y despejando se tiene el valor de F

$$F = \frac{M}{R \operatorname{tg}\varphi} = \frac{M\sqrt{L^2 - h^2}}{R\,h}$$

que mantiene la deslizadera en su posición horizontal.

Ejemplo nº 3. Consideremos un caso de un sistema con tres grados de libertad compuesto por tres barras articuladas de igual longitud L e igual peso P que se encuentra en equilibrio bajo la acción de una fuerza **F** horizontal aplicada al extremo de la tercera barra, figura 7-5a). La configuración de equilibrio viene fijada por los ángulos θ_1 , θ_2 , θ_3 es decir, el sistema tiene tres grados de libertad correspondientes a las tres coordenadas independientes.

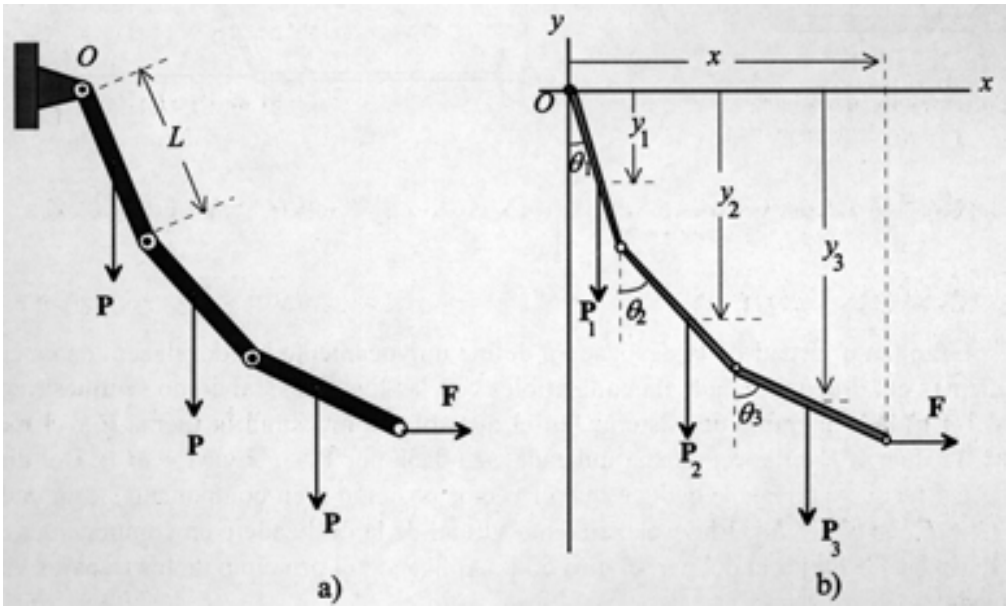


Fig. 7-5

Será necesario aplicar tres veces el principio de los trabajos virtuales, uno por grado de libertad haciendo variar en cada caso una de las coordenadas y dejando constantes las otras dos. Las fuerzas activas que intervienen son las representadas en la figura 7-5 b), cuyas expresiones en componentes están dadas por $\mathbf{P}_1 = -P\,\mathbf{j}$, $\mathbf{P}_2 = -P\,\mathbf{j}$, $\mathbf{P}_3 = -P\,\mathbf{j}$, $\mathbf{F} = F\,\mathbf{i}$. Los vectores posición de los pesos son: $\mathbf{r}_1 = x_1\,\mathbf{i} + y_1\,\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_2 = x_2\,\mathbf{i} + y_2\,\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_3 = x_3\,\mathbf{i} + y_3\,\mathbf{j}$ y el de la fuerza **F**, el vector $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$. Diferenciando los vectores posición se tienen los desplazamientos virtuales:

$$\delta\mathbf{r}_1 = \delta x_1\,\mathbf{i} + \delta y_1\,\mathbf{j} \quad ; \quad \delta\mathbf{r}_2 = \delta x_2\,\mathbf{i} + \delta y_2\,\mathbf{j} \quad ; \quad \delta\mathbf{r}_3 = \delta x_3\,\mathbf{i} + \delta y_3\,\mathbf{j} \quad ; \quad \delta\mathbf{r} = \delta x\,\mathbf{i} + \delta y\,\mathbf{j}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Aplicando el principio de los trabajos virtuales queda

$$\delta W = \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r} + \mathbf{P}_1\cdot\delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{P}_2\cdot\delta\mathbf{r}_2 + \mathbf{P}_3\cdot\delta\mathbf{r}_3 = F\,\delta x - P\,\delta y_1 - P\,\delta y_2 - P\,\delta y_3 = 0 \qquad \text{(a)}$$

Diferenciando los valores de las coordenadas de los puntos de aplicación de las fuerzas en función de la longitud L de las barras y de los ángulos θ_1, θ_2, θ_3 deducidos de la figura 7-5 b) se tiene:

$$y_1 = -\frac{1}{2}L\cos\theta_1 \quad \Rightarrow \quad \delta y_1 = \frac{1}{2}L\,\mathrm{sen}\,\theta_1\,\delta\theta_1$$

$$y_2 = -L\left(\cos\theta_1 + \frac{1}{2}\cos\theta_2\right) \quad \Rightarrow \quad \delta y_2 = L\left(\mathrm{sen}\,\theta_1\delta\theta_1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta_2\,\delta\theta_2\right)$$

$$y_3 = -L\left(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \frac{1}{2}\cos\theta_3\right) \Rightarrow \delta y_3 = L\left(\mathrm{sen}\,\theta_1\delta\theta_1 + \mathrm{sen}\,\theta_2\delta\theta_2\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,\theta_3\delta\theta_3\right)$$

$$x = L\left(\mathrm{sen}\,\theta_1 + \mathrm{sen}\,\theta_2 + \mathrm{sen}\,\theta_3\right) \Rightarrow \delta x = L\left(\cos\theta_1\delta\theta_1 + \cos\theta_2\,\delta\theta_2 + \cos\theta_3\delta\theta_3\right)$$

Sustituyendo en (a) y haciendo variar θ_1 mientras θ_2 y θ_3 se mantienen constantes, se tiene

$$\delta W_1 = \left(FL\cos\theta_1 - \frac{1}{2}PL\,\mathrm{sen}\,\theta_1 - PL\,\mathrm{sen}\,\theta_1 - PL\,\mathrm{sen}\,\theta_1\right)\delta\theta_1 = 0 \Rightarrow \mathrm{tg}\,\theta_1 = \frac{2F}{5P} \qquad (b)$$

Haciendo variar θ_2 mientras θ_1 y θ_3 se mantienen constantes, se obtiene

$$\delta W_2 = \left(FL\cos\theta_2 - \frac{1}{2}PL\,\mathrm{sen}\,\theta_2 - PL\,\mathrm{sen}\,\theta_2\right)\delta\theta_2 = 0 \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\theta_2 = \frac{2F}{3P} \qquad \text{(c)}$$

Haciendo variar θ_3 mientras θ_1 y θ_2 se mantienen constantes, se obtiene

$$\delta W_3 = \left(FL\cos\theta_3 - \frac{1}{2}PL\,\mathrm{sen}\,\theta_3\right)\delta\theta_3 \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\theta_3 = \frac{2F}{P} \qquad \text{(d)}$$

Las ecuaciones (b), (c) y (d) dan los valores de los ángulos de la configuración de equilibrio.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

7.5 Sistemas con elementos elásticos y rozamiento

Muelles. En algunas aplicaciones de la ingeniería, se utilizan sistemas mecánicos en los cuales uno o varios de sus elementos sufren deformaciones elástica. El comportamiento elástico del sistema proviene de los resortes que incorpora, o también, de la naturaleza elástica de los elementos estructurales cargados. Consideremos ahora sistemas ideales en los que uno de sus elementos sea un muelle, y se pretende determinar la configuración de equilibrio aplicando el principio de los trabajos virtuales. Será necesario evaluar el trabajo virtual correspondiente a la fuerza del muelle para poder incorporarlo a la ecuación $\delta W = 0$.

El muelle es un elemento que realiza trabajo. Para que un muelle ejerza una fuerza sobre un cuerpo es necesario que su longitud tenga un valor diferente de su longitud natural l. Si se designa por Δl la deformación del muelle, se encuentra experimentalmente que la fuerza que ejerce el muelle está dada por

$$F = k\,\Delta l \tag{7-6}$$

donde k es la *constante elástica del muelle*, expresada en N/m. La ecuación (7-6) es válida dentro de los límites del comportamiento lineal del muelle. La dirección de la fuerza **F** ejercida por el muelle es la definida por el origen y el extremo del muelle, con el origen fijo y el extremo libre unido al cuerpo sobre el que ejerce la fuerza, su sentido es opuesto a la deformación, marcando la tendencia del muelle deformado a recuperar su longitud natural, tal como se muestra en la figura 7-6.

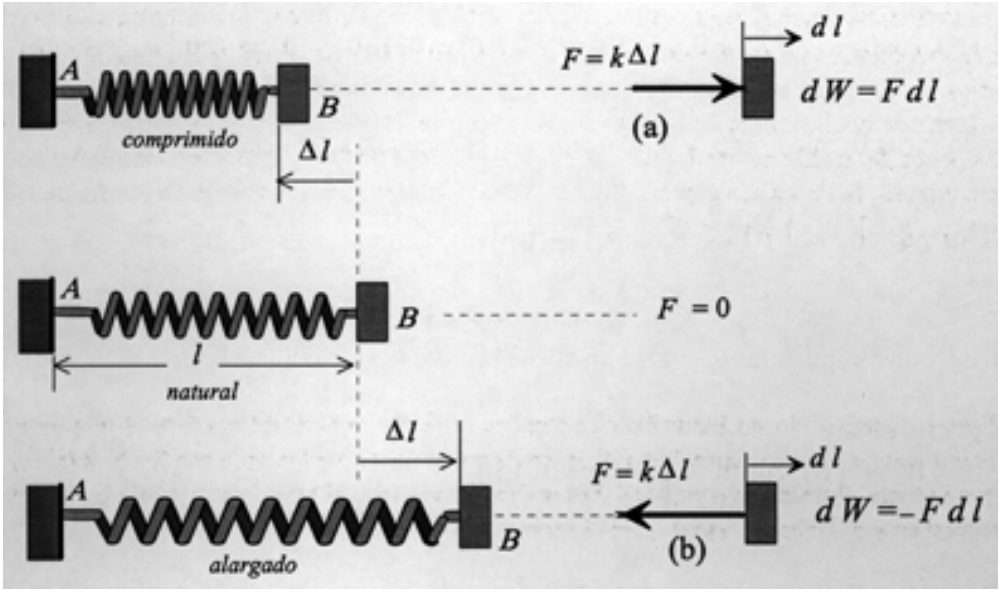


Fig. 7-6

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

El trabajo realizado por el muelle cuando el cuerpo *B* unido a su extremo libre efectúa un desplazamiento diferencial *dl*, está dado por el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento

$$dW_m = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \tag{7-7}$$

El trabajo de la fuerza **F** es *positivo* cuando el desplazamiento diferencial del cuerpo hace que la deformación *disminuya*, figura 7-6 (a) y es *negativo* cuando el desplazamiento diferencial del cuerpo hace que la deformación *aumente*, figura 7-6 (b). Cuando el sistema en equilibrio incluye un muelle, la fuerza del muelle es una fuerza activa y para un desplazamiento virtual del sistema, el trabajo virtual correspondiente a la fuerza del muelle, dado por

$$\delta \mathrm{Wm} = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{l} \tag{7-8}$$

se incluirá como un sumando más en la ecuación del principio de los trabajos virtuales.

Rozamiento. Supongamos un sistema ideal tal que alguno de sus elementos estructurales está en contacto con superficies de apoyo rugosas, y sea μ el coeficiente de rozamiento de ambas superficies. La determinación de la configuración de equilibrio del sistema mediante el método de los trabajos virtuales requiere dar al sistema un desplazamiento virtual compatible con las ligaduras, y calcular el trabajo virtual de las fuerzas activas que actúan sobre el sistema. Con referencia al rozamiento, el desplazamiento virtual del elemento del sistema sobre la superficie de apoyo, es equivalente a una situación de movimiento inminente, por lo que la fuerza de rozamiento tiene su valor máximo $F_r = \mu N$, donde N es la reacción normal en el apoyo. Calculando el valor de N mediante las ecuaciones de equilibrio del sistema, queda determinada la fuerza de rozamiento como una fuerza externa más que actúa sobre el sistema, cuya dirección es la de la tangente a la superficie de apoyo y sentido opuesto al desplazamiento. Si δr es el desplazamiento, el trabajo virtual de la fuerza de rozamiento es siempre un trabajo negativo y está dado por

$$\delta \mathrm{W}_r = -F_r \, \delta r \tag{7-9}$$

Así pues, el principio de los trabajos virtuales para sistemas ideales sobre el que actúan fuerzas externas, fuerzas de muelles y fuerzas de rozamiento, se formula mediante una ecuación que incluye el trabajo virtual δW de las fuerzas activas, el trabajo virtual de las fuerzas de los muelles y el trabajo virtual de las fuerzas de rozamiento

$$\delta \mathrm{W} + \delta \mathrm{W}_m + \delta \mathrm{W}_r = 0 \tag{7-10}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Ejemplo nº 4. Consideremos el sistema representado en la figura 7-7 a). El sistema está formado por dos barras articuladas de la misma longitud L, que bajo la acción de una carga **Q** aplicada en la articulación B comprimen un muelle de constante k y longitud natural l, unido al bloque C el cual se apoya sobre una superficie rugosa siendo μ el coeficiente de rozamiento entre ambas superficies. Mediante la aplicación del principio de los trabajos virtuales, determinar el valor de la carga Q para que el sistema esté en equilibrio en la posición indicada.

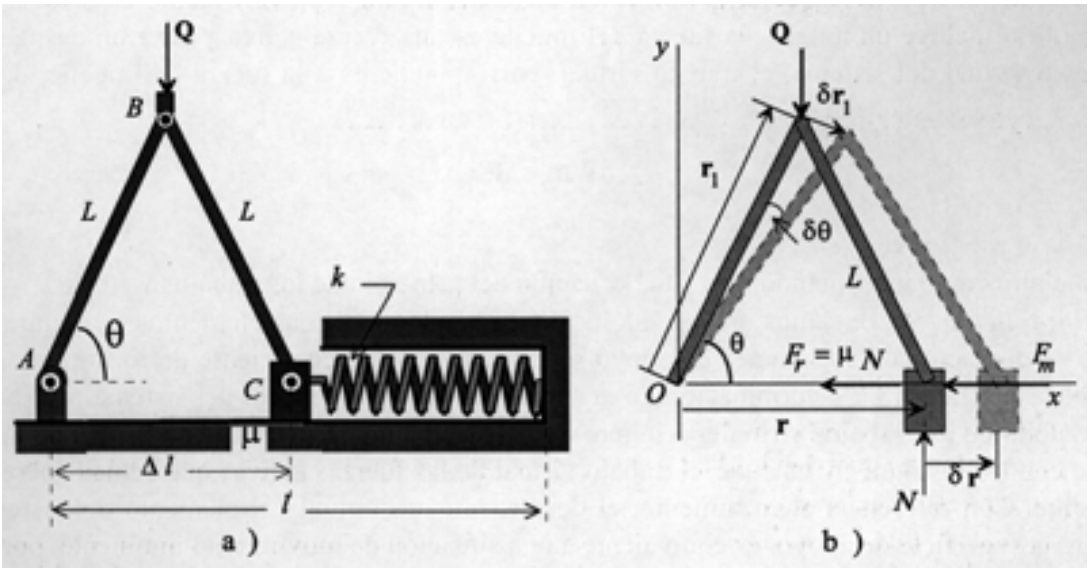


Fig. 7-7

El desplazamiento virtual del bloque C define unívocamente los desplazamientos de las barras del sistema, luego éste tiene un grado de libertad y su configuración queda determinada por la coordenada θ. De la figura 11-7 a) se tiene que el incremento de longitud del muelle comprimido por la carga **Q**, está dado por $\Delta l = 2\,L\cos\theta$.

En el sistema de referencia indicado en la figura 7-7 b), la carga está dada por $\mathbf{Q} = -Q\,\mathbf{j}$ y la fuerza del muelle es $\mathbf{F}_m = -(2\,k\,L\cos\theta)\,\mathbf{i}$. Mediante las ecuaciones de equilibrio del sistema se obtiene que el valor de la reacción normal N está dado por $N = Q/2$, luego la fuerza de rozamiento es $\mathbf{F}_r = -(\mu\,Q/2)\,\mathbf{i}$.

El vector posición del punto de aplicación de la fuerza del muelle y de la fuerza de rozamiento es el vector $\mathbf{r} = 2\,L\cos\theta\,\mathbf{i}$, y el de la carga **Q** es $\mathbf{r}_1 = L\,(\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j})$. Los desplazamientos virtuales de las fuerzas que actúan sobre el sistema están dados respectivamente por

$$\delta\mathbf{r} = 2\,L\,(\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i})\,\delta\theta \qquad \delta\mathbf{r}_1 = L\,(\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} - \cos\theta\,\mathbf{j})\,\delta\theta$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Aplicando el principio de los trabajos virtuales se tiene

$$\delta W + \delta Wm + \delta W_r = \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_m \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{F}_r \cdot \delta \mathbf{r} = 0 \qquad \text{(a)}$$

Efectuando los productos escalares de la ecuación (a) queda

$$Q L \cos\theta \, \delta\theta - 2 k L \Delta l \operatorname{sen}\theta \, \delta\theta - \mu Q L \operatorname{sen}\theta \, \delta\theta = 0 \qquad \text{(b)}$$

Aislando el valor de la carga Q en la ecuación (b) se obtiene

$$Q = \frac{4 k L \operatorname{sen}\theta}{1 - \mu \operatorname{tg}\theta} \qquad \text{(c)}$$

El sistema articulado puede utilizarse únicamente para valores de μ menores que $1/\operatorname{tg}\theta$. Para el caso en que $\mu \operatorname{tg}\theta = 1$, el sistema no puede permanecer en equilibrio ya que requeriría aplicar en la articulación B una carga infinita.

Rendimiento mecánico. La clara ventaja del método de los trabajos virtuales frente a las ecuaciones de equilibrio, consiste en que el sistema se trata como un todo sin necesidad de desmembrarlo. Sin embargo, cuando el sistema no es ideal, es decir, están presentes rozamientos internos apreciables en el sistema, es necesario separar el sistema para calcular las fuerzas de rozamiento internas y en consecuencia, el método de los trabajos virtuales pierde su eficacia.

Debido a la pérdida de energía a causa del trabajo de las fuerzas de rozamiento, el trabajo proporcionado por la máquina es siempre menor que el trabajo entregado a la misma. Se define el *rendimiento mecánico* como el cociente entre el trabajo útil realizado por la máquina y el trabajo entregado a esta. Para las máquinas ideales, este cociente es igual a la unidad y para las máquinas reales es siempre menor que la unidad.

$$\eta = \frac{\text{Trabajo util realizado}}{\text{Trabajo entregado}} \qquad \text{(7-11)}$$

El rendimiento de las máquinas simples constituidas por sistemas que tienen un grado de libertad, se puede evaluar mediante el principio de los trabajos virtuales, calculando el

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

numerador y el denominador de la ecuación (7-11) para un desplazamiento virtual del sistema. A título de ejemplo, evaluemos el rendimiento del sistema de la figura 7-7. El trabajo útil realizado en el desplazamiento virtual considerado, es el trabajo para incrementar la deformación del muelle, dado por *trabajo útil* = $4\,k\,L^2$ sen θ cos θ δθ, y el trabajo entregado al sistema es el trabajo de la carga *Q trabajo entregado* = $Q\,L$ cos θ δθ. Sustituyendo Q por su valor dado por la ecuación (c), de la definición (7-11) se obtiene

$$\eta = 1 - \mu \operatorname{tg} \theta \tag{11-12}$$

Queda claro que el sistema sólo es utilizable para valores de μ tales que μ tg θ <1.

7.6 Energía potencial y equilibrio

En un sentido genérico, la energía de un sistema representa la capacidad que tiene el sistema de realizar un trabajo. Consideremos de nuevo el trabajo realizado por el muelle en un desplazamiento diferencial dado. Si el desplazamiento aumenta la deformación del muelle, el trabajo de la fuerza del muelle es negativo y si el desplazamiento disminuye la deformación del muelle, el trabajo es positivo. El principio de conservación de la energía afirma que la energía de un sistema se mantiene constante en una transformación cualquiera del mismo.

Un muelle deformado efectúa trabajo, luego tiene energía. La energía del muelle deformado se denomina *energía potencial elástica* y su valor, que lo denominaremos por U_e aumenta con la deformación. Aplicando al muelle deformado el principio de conservación de la energía se tiene que $W + U_e = cte$. Si el muelle no trabaja $W = 0$, la energía potencial se mantiene constante. Diferenciando la ecuación de la conservación de la energía se obtiene

$$dW + dU_e = 0 \quad \text{de donde} \quad dU_e = -dW \tag{7-13}$$

Supongamos un desplazamiento dx tal que aumenta la deformación del muelle; el trabajo de la fuerza del muelle es $dW = -F\,dx$. Sustituyendo en (7-13) queda

$$dU_e = F\,dx \tag{7-14}$$

donde la fuerza del muelle está dada por $F = k\,x$, siendo x el alargamiento inicial. La energía potencial del muelle correspondiente al alargamiento x, se obtiene integrando la ecuación (7-14) entre 0 y x. Al alargamiento cero le corresponde energía potencial elástica nula, luego queda

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$U_e = \int_0^x kx' dx' = \frac{1}{2} k x^2 \tag{7-15}$$

Si la longitud natural del muelle aumenta hasta Δl, su energía potencial elástica está dada por la ecuación (7-15) sustituyendo x por Δl. Debido a que la medida de la deformación está elevada al cuadrado, la energía potencial elástica de un muelle deformado es siempre positiva con independencia del signo que tenga la deformación.

En mecánica, existe otro tipo de energía potencial asociada a la posición de un cuerpo en un campo de fuerzas. Concretamente, el peso **P** de un cuerpo es la resultante de las fuerzas que la tierra ejerce sobre el cuerpo, debido a la interacción gravitacional de la masa de la tierra con la masa del cuerpo. Tal como se vio en el Capítulo 5, la intensidad de la gravitación **g** es un vector constante en las proximidades de la superficie terrestre y en consecuencia, el peso **P** de un cuerpo situado en cualquier punto de dicho entorno, es también una magnitud constante.

Como ya se ha visto en las secciones anteriores, la expresión del peso de un cuerpo en una referencia con el eje y en sentido vertical está dada por $\mathbf{P} = -P\,\mathbf{j}$. Si el punto de aplicación del peso está definido por el extremo del vector $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$, el trabajo del peso en un desplazamiento diferencial $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j}$, es $dW = -P\,dy$. El trabajo del peso es negativo si su cota y aumenta ($dy > 0$) y es positivo si su cota y disminuye ($dy < 0$).

En consecuencia, un cuerpo es un sistema que trabaja, luego tiene energía. La energía U_g asociada a un cuerpo debido a su posición respecto de una referencia determinada, se denomina *energía potencial gravitatoria* del cuerpo. Al igual que en el caso del muelle, del principio de conservación de la energía se deduce que

$$dU_g = -dW = P\,dy \tag{7-16}$$

Si el desplazamiento vertical diferencial disminuye la cota, el trabajo es positivo y el incremento diferencial de energía potencial es negativo. Integrando la ecuación (7-16) se tiene

$$U_g = P y + \text{cte.} \tag{7-17}$$

Asignándole a la energía potencial el valor nulo cuando el cuerpo está en la cota $y = 0$, la constante de integración de la ecuación (7-17) es nula, y la energía potencial del cuerpo en la cota y es

$$U_g = P y = m g y \tag{7-18}$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

La energía potencial gravitatoria de un cuerpo es positiva para posiciones por encima de la cota cero, y negativa para posiciones del cuerpo por debajo de la cota cero. La energía potencial mecánica U de un sistema es la suma de la energía potencial elástica y de la energía potencial gravitatoria del sistema. Se tiene

$$U = U_g + U_e \tag{7-19}$$

Si en un sistema no están presentes fuerzas de rozamiento cinético, cuyo trabajo se pierde en forma de calor, del principio de la conservación de la energía aplicado al sistema se tiene que

$$dW = - dU \tag{7-20}$$

Los sistemas en los que no están presentes fuerzas de rozamiento cinético, se denominan *sistemas conservativos*, para los cuales es aplicable la ecuación (7-20) cualquiera que sea el tipo de fuerzas consideradas.

Veamos ahora la relación entre la energía potencial y el equilibrio. La ecuación (7-20), aplicada a un sistema en equilibrio al cual se le somete a un desplazamiento virtual, se transforma en la expresión $\delta W = - \delta U$, donde δW es el trabajo de las fuerzas activas del sistema en el desplazamiento virtual. Si la configuración del sistema viene determinada por una coordenada θ, la energía potencial del sistema será función de dicha coordenada, luego $\delta U = (dU/d\theta)\, \delta\theta$ y de la aplicación del principio de los trabajos virtuales $\delta W = 0$, se tiene

$$\frac{dU}{d\theta} = 0 \tag{7-21}$$

En función de la energía potencial, el principio de los trabajos virtuales establece que *si un sistema está en equilibrio, la derivada de la energía potencial del sistema es nula.* De la ecuación (7-21) se obtiene el valor de θ correspondiente a la configuración de equilibrio. Para los sistemas con n grados de libertad, se tienen n coordenadas independientes. El incremento diferencial de la energía potencial es

$$\delta U = \sum_1^n \frac{\partial U}{\partial \theta_i}\, \delta\theta_i \tag{7-22}$$

y el principio establece que se deberán igualar a cero las n derivas parciales de U respecto de cada una de las n coordenadas.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

Ejemplo nº 5. Las dos barras articuladas de la figura 7-8 de longitud $L = 3\ h/4$ y peso P están soportadas por un muelle de constante k y longitud natural $h/4$. El sistema se encuentra en equilibrio en la posición indicada. Determinar θ y el valor de k compatible con el sistema. El bloque unido al muelle se desplaza sobre la guía horizontal sin rozamiento.

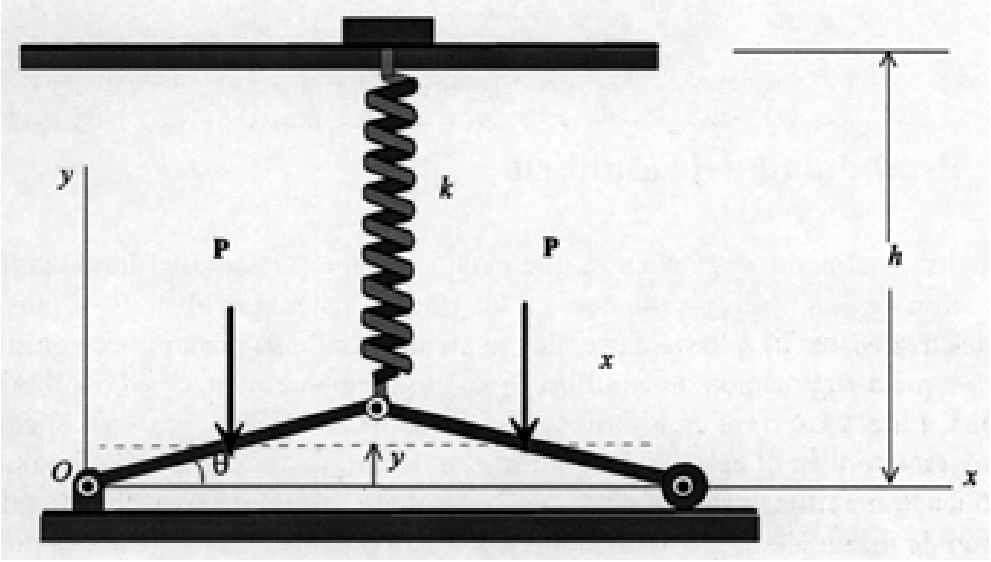


Fig. 7-8

De la figura, fácilmente se deduce que el incremento de longitud del muelle está dado por $\Delta l = h/4 - L\,\text{sen}\theta$ y la cota y del punto de aplicación del peso **P** de las barras está dadas por $y = 1/2\ L\ \text{sen}\theta$. De las ecuaciones (7-15), (7-18) y (7 -19), sustituyendo valores se tiene que la energía potencial del sistema está dada por

$$U = U_g + U_m = P L \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2} k \left(\frac{h}{4} - L \operatorname{sen}\theta\right)^2 \qquad \text{(a)}$$

Aplicando el principio de los trabajos virtuales en la forma de la energía potencial queda

$$\frac{dU}{d\theta} = PL\cos\theta - k\left(\frac{h}{4} - L\operatorname{sen}\theta\right)L\cos\theta = 0 \qquad \text{(b)}$$

de donde se obtiene el valor de la coordenada θ de la posición de equilibrio

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$3 \operatorname{sen} \theta = 1 - \frac{4P}{kh} \qquad \text{(c)}$$

De la ecuación (c) se deduce que la constante k de elasticidad del muelle ha de tener un valor tal que

$$k > \frac{4P}{h} \qquad \text{(d)}$$

7.7 Estabilidad del equilibrio

Experimentalmente se encuentra que cuando a un sistema se le desplaza ligeramente de su posición de equilibrio y se le deja en libertad, el sistema evoluciona según uno de los siguientes tres casos: ***a***) el sistema se mueve alejándose de su posición de equilibrio, ***b***) el sistema retorna a su posición de equilibrio y ***c***) el sistema permanece en equilibrio en la nueva posición. En el caso *a*) el equilibrio se denomina inestable, en el caso *b*) el equilibrio se denomina estable y en el caso *c*) el equilibrio se denomina indiferente. La evolución del sistema pone de manifiesto el principio, de que todo sistema físico libre tiende a ocupar la posición de mínima energía. Utilizando la energía potencial del sistema, es posible describir estos estados de equilibrio mediante las derivadas de la función U, y por tanto, saber si la posición de equilibrio del sistema es inestable, estable o indiferente.

Como se ha visto, la configuración de equilibrio de un sistema con un grado de libertad queda definida por el valor (o valores) de θ que satisface la ecuación $dU/d\theta = 0$, la cual gráficamente representa, que la tangente a la curva $U = f(\theta)$ en dicho punto es horizontal, o que la función U tiene un valor constante. La función U tiene un máximo en el punto θ si la derivada segunda en ese punto es negativa $d^2U/d^2\theta < 0$; la función U tiene un mínimo en el punto θ si la derivada segunda en ese punto es positiva $d^2U/d^2\theta > 0$ y la función U tiene un punto de inflexión en θ si la derivada segunda en ese punto tiene un valor nulo $d^2U/d^2\theta = 0$. Si la primera derivada y todas las sucesivas son nulas, la función U es constante.

Equilibrio inestable. El equilibrio es inestable cuando la energía potencial es *máxima*. En efecto, al desplazar ligeramente el sistema de la posición de equilibrio, su energía potencial en la nueva posición tiene un valor menor que el del máximo, y al dejarlo en libertad evoluciona de tal manera que su energía potencial disminuya, es decir, alejándose de la posición de equilibrio.

Equilibrio estable. El equilibrio es estable cuando la energía potencial es *mínima*. En efecto, al desplazar ligeramente el sistema de la posición de equilibrio, su energía potencial en la nueva posición tiene un valor mayor que el del mínimo, y al dejarlo en libertad evoluciona de tal manera que su energía potencial disminuya, es decir, acercándose a la posición de equilibrio.

Equilibrio indiferente. El equilibrio es indiferente cuando la energía potencial es

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

constante. En efecto, al desplazar ligeramente el sistema de la posición de equilibrio, su energía potencial en la nueva posición tiene el mismo valor, luego sigue siendo una posición de equilibrio. En resumen se tiene:

$$\frac{dU}{d\theta} = 0 \qquad \frac{d^2U}{d\theta^2} < 0 \qquad \text{equilibrio inestable} \qquad (7\text{-}23)$$

$$\frac{dU}{d\theta} = 0 \qquad \frac{d^2U}{d\theta^2} > 0 \qquad \text{equilibrio estable} \qquad (7\text{-}24)$$

$$\frac{dU}{d\theta} = 0 \qquad \frac{d^2U}{d\theta^2} = \frac{d^3U}{d\theta^3} = \ldots\ldots = 0 \qquad \text{equilibrio indiferente} \qquad (7\text{-}25)$$

Si las dos primeras derivas son nulas, pero no lo son las de orden superior, el equilibrio es inestable si la primera derivada no nula que se encuentra es negativa, y el equilibrio es estable, si la primera derivada no nula que se encuentra es de orden par y mayor que cero. Cuando el sistema tiene n grados de libertad, la energía potencial es una función de n variables independientes, y será necesario aplicar la teoría de funciones de varias variables para determinar el criterio de estabilidad del sistema. El sistema de n variables es estable si se cumple que

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial \theta_2} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial \theta_3} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_n} = 0 \qquad (7\text{-}26)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta_1^2} > 0 \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_2^2} > 0 \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_3^2} > 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\partial^2 U}{\partial \theta_n^2} > 0 \qquad (7\text{-}27$$

Como ejemplo de aplicación, consideremos el análisis del estado de equilibrio del sistema representado en la figura 7-8. De la condición de equilibrio $dU/d\theta = 0$, se deduce que el valor del ángulo θ satisface la ecuación $3 \operatorname{sen} \theta = 1 - 4\, P/k\, h$.

Para determinar si el equilibrio es estable, inestable o indiferente, es necesario calcular el signo de la derivada segunda de la energía potencial U del sistema para el valor de θ que anula la primera derivada. La derivada segunda de la energía es

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = -PL\,\text{sen}\,\theta + kL\left(\frac{h}{4} - L\,\text{sen}\,\theta\right)\text{sen}\,\theta + kL^2\cos^2\theta$$

Sustituyendo el senθ por su valor correspondiente a la posición de equilibrio y operando queda

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = \frac{LP}{3}\left(\frac{k}{4P/h} - 1\right)\left(1 - \frac{4P/h}{k}\right) + kL^2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Pero como $k > 4P/h$, la derivada segunda de la energía es > 0 y el equilibrio es estable para la posición definida por el ángulo

$$\theta = \text{arc sen}\,\frac{1}{3}\left(1 - \frac{4P}{kh}\right)$$

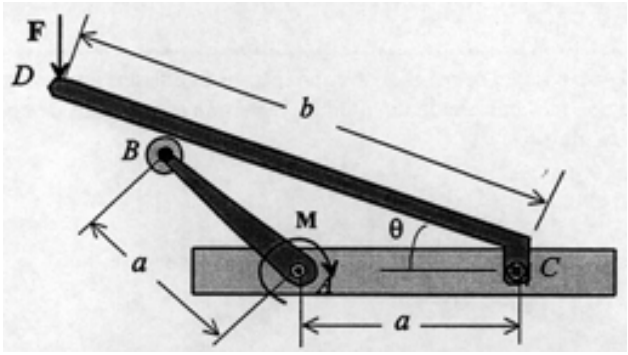
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

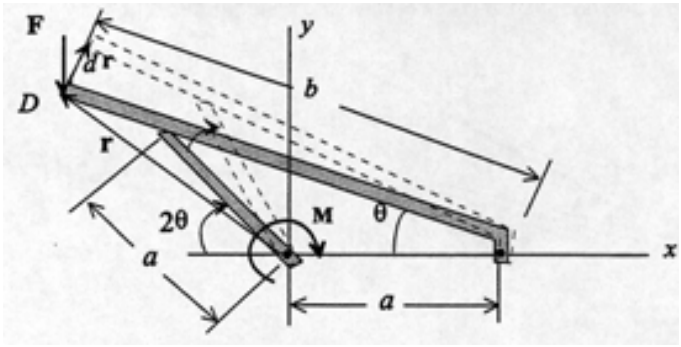
PROBLEMA 7-1

Determinar el módulo del par **M** aplicado a la barra *AB* de la figura adjunta para que el sistema se mantenga en equilibrio.



SOLUCIÓN

El desplazamiento virtual de la biela *AB* define unívocamente el desplazamiento correspondiente de la barra articulada *CD* del brazo tal como se ve en la figura adjunta del diagrama del sistema, en el que sólo se muestran la fuerza **F** y el momento **M**.



La fuerza **F** en la referencia indicada está dada por $\mathbf{F} = -F\,\mathbf{j}$ y $\mathbf{M} = M\,\mathbf{k}$. Del diagrama de las fuerzas activas se deduce que el vector posición **r** del punto de aplicación de la fuerza está dado por $\mathbf{r} = -(b\cos\theta - a)\,\mathbf{i} + b\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}$. El desplazamiento virtual en componentes de la barra articulada es $\delta\mathbf{r} = b\,\text{sen}\,\theta\,\delta\theta\,\mathbf{i} + b\,cosq\,\delta\theta\,\mathbf{j}$ y el desplazamiento virtual del par, es el giro $-2\,dq\,\mathbf{k}$. Aplicando el principio de los trabajos virtuales queda

$$\delta W = 2M\delta\theta - Fb\cos\theta\,\delta\theta = 0$$

de donde el par aplicado para mantener el equilibrio está dado por

$$M = \frac{1}{2}Fb\cos\theta$$

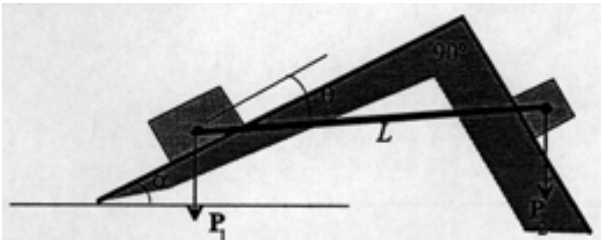
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

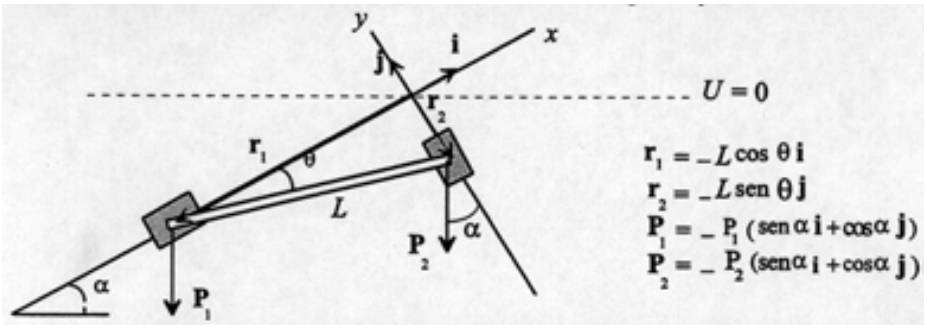
PROBLEMA 7-2

Los pesos $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ de la figura adjunta se mantienen sobre planos inclinados sin rozamiento y unidos mediante una barra rígida inestensible de longitud L. Determinar el ángulo de equilibrio θ y el tipo de equilibrio del sistema.



SOLUCIÓN

El desplazamiento virtual de uno de los bloques determina unívocamente el del otro, luego el sistema tiene un grado de libertad, luego su configuración queda determinada por el ángulo θ. El sistema de referencia para fijar la posición de los bloques es el indicado en la figura adjunta.



De la figura se deducen inmediatamente las expresiones de los pesos y de sus posiciones en la referencia. Los desplazamientos virtuales de los pesos están dados respectivamente por

$$\delta \mathbf{r}_1 = L \operatorname{sen}\theta \, \delta\theta \, \mathbf{i} \qquad \delta \mathbf{r}_2 = -L \cos\theta \, \delta\theta \, \mathbf{j}$$

Aplicando el principio de los trabajos virtuales queda

$$\delta W = \mathbf{P}_1 \cdot \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{P}_2 \cdot \delta \mathbf{r}_2 = -(P_1 L \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\alpha)\delta\theta + (P_2 \cos\theta \cos\alpha)\delta\theta = 0$$

de donde se tiene la condición de equilibrio $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{P_2}{P_1 \operatorname{tg}\alpha}$

Estabilidad del equilibrio. Tomando el nivel cero de energía potencial en la línea de puntos de la figura, se tiene que la energía potencial del sistema es $U = -P_1 L \operatorname{sen}\alpha \cos\theta - P_2 L \operatorname{sen}\theta \cos\alpha$. Igualando a cero la derivada de U respecto de θ se obtiene la condición de equilibrio y la derivada 2ª

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = P_1 L \operatorname{sen}\alpha \cos\theta + P_2 L \cos\alpha \operatorname{sen}\theta > 0 \qquad \Rightarrow \textit{ equilibio estable}$$

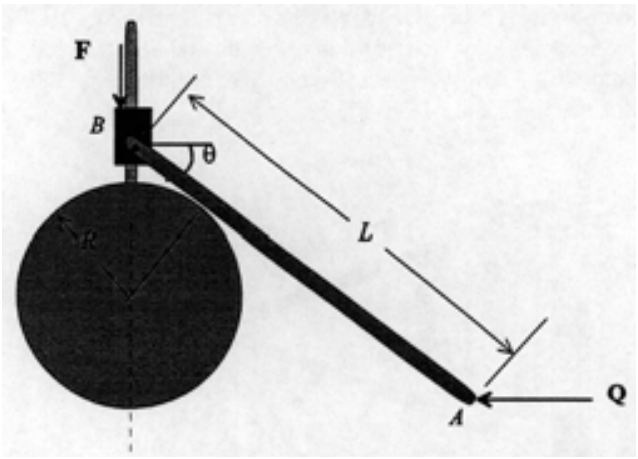
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

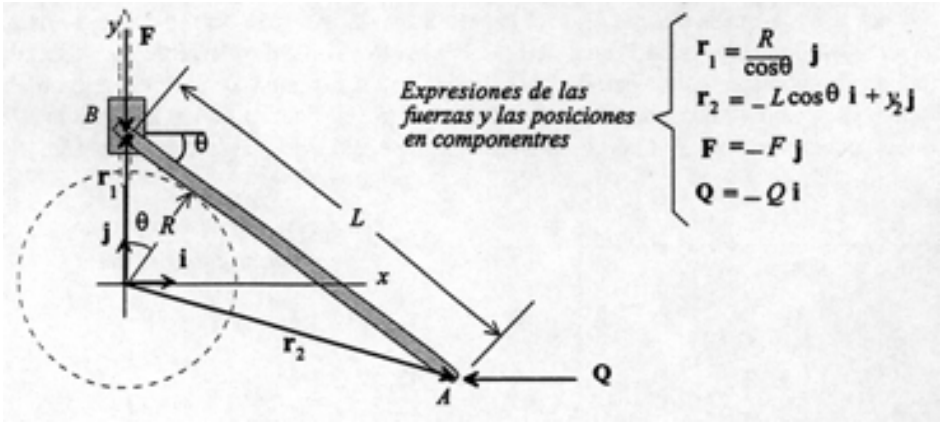
PROBLEMA 7-3

Una barra de longitud L está unida a un pasador por su extremo B y se apoya sobre una superficie cilínfrica circular lisa de radio R. El pasador puede deslizar sin rozamiento a lo largo de la guía vertical cuya dirección pasa por el centro del cilindro, tal como se ve en la figura adjunta. Determinar el valor de la fuerza **F** aplicada al pasador para que el sistema esté en equilibrio.



SOLUCIÓN

El sistema tiene un grado de libertad y su configuración queda definida por el ángulo θ. El origen de coordenadas se toma en el centro del cilindro tal como se indica en la figura adjunta.



Los desplazamientos virtuales están dados por $\delta \mathbf{r}_1 = \dfrac{R \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta^2}\delta\theta\,\mathbf{j}$ y $\delta \mathbf{r}_2 = -L\operatorname{sen}\theta\,\delta\theta\,\mathbf{i} + \delta y_2\,\mathbf{j}$

Aplicando el principio de los trabajos virtuales queda

$$\delta W = \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{Q}\cdot\delta\mathbf{r}_2 = -\frac{FR\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\delta\theta + QL\operatorname{sen}\theta\,\delta\theta = 0 \;\Rightarrow\; F = \frac{QL}{R}\cos^2\theta$$

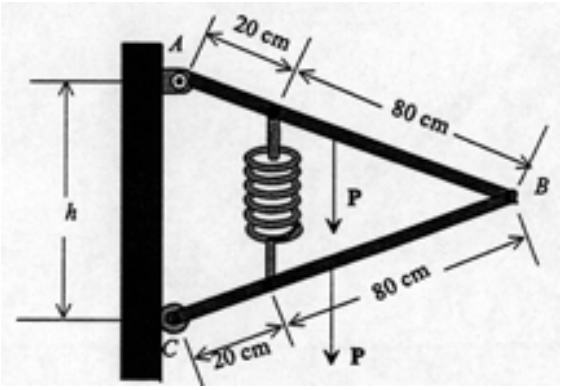
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

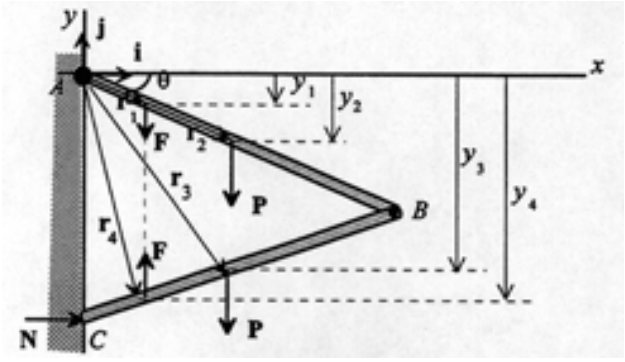
PROBLEMA 7-4

Dos barras *AB* y *BD* homogéneas , de masa iguales a 10 kg , están unidas por su extremo *B* mediante un pasador y conectadas a los extremos de un muelle tal como se indica en la figura adjunta. La longitud del muelle sin deformar es de 36 cm y su constante $k = 680$ N/m. Determinar el valor *h* correspondiente a la posición de equilibrio.



SOLUCIÓN

La configuración del sistema queda definida por el ángulo θ que la barra *AB* forma con la horizontal.El muelle se sustituye por las fuerzas F que ejerce sobre las barras. El desplazamiento virtual del extremo *C* de la barra en contacto con la pared es perpendicular a la reacción N, luego el trabajo virtual correspondiente es cero. Las fuerzas que intervienen en el trabajo virtual tienen la dirección del eje *y* , luego sólo es necesario determinar las componentes según el eje *y* de sus vectores posición.



Expresiones de los vectores posición en componentes

$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} - 20\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}$

$\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} - 50\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}$

$\mathbf{r}_3 = x_3\mathbf{i} - 150\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}$

$\mathbf{r}_4 = x_4\mathbf{i} - 180\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}$

Aplicando el principio de los trabajos virtuales queda

$$\delta W = \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{P}\cdot\delta\mathbf{r}_2 + \mathbf{P}\cdot\delta\mathbf{r}_3 + \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r}_4 = (-160F\cos\theta + 200P\cos\theta)\delta\theta = 0$$

de donde se tiene que la fuerza del muelle está dada por $4F = 5P$. El incremento de longitud está dado por $\Delta l = F/k = 5P/4k =$ 18 cm y la del muelle alargado $l = 54$ cm . Inmediatamente se tiene que la posición de equilibrio es $h = 67{,}5$ cm.

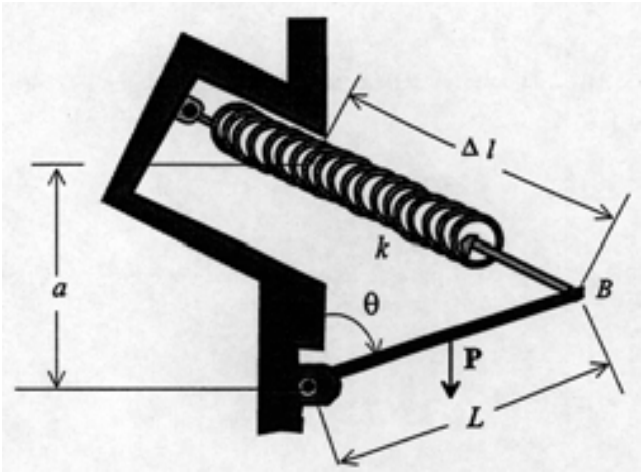
© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

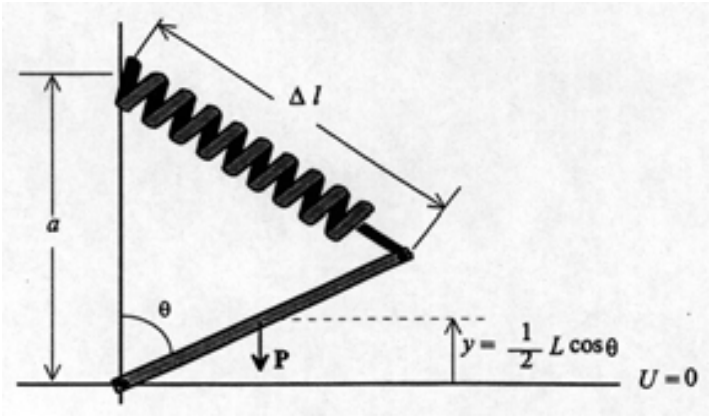
PROBLEMA 7-5

Una barra uniforme de longitud L y peso **P** se mantiene en equilibrio mediante un muelle de constante k tal como se muestra en la figura adjunta. Para el valor $\theta = 0°$, el muelle no está deformamado . Discutir la posición de equilibrio.



SOLUCIÓN

La posición del sistema queda unívocamente definida por el ángulo θ. Para determinar la posición de equilibrio se utiliza directamente la energía potencial del sistema. El nivel cero de energía potencial se toma en la horizontal que pasa por el extremo A de la barra.



La energía potencial del sistema es la suma de la energía potencial del peso **P** más la energía potencial elástica del muelle

$$U = -\frac{1}{2} LP \cos\theta + \frac{1}{2} k \Delta l^2$$

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net

www.elsolucionario.net

De la figura se deduce, utilizando la ley del coseno, que el incremento de longitud del muelle está dado por

$$\Delta l^2 = L^2 + a^2 - 2aL\cos\theta$$

Utilizando la energía potencia del sistema, la condición de equilibrio se formula por $dU/d\theta = 0$. Derivando e igualando a cero se tiene

$$-\frac{1}{2}LP\,\text{sen}\,\theta + \frac{1}{2}k(2aL\,\text{sen}\,\theta) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{1}{2}\frac{P}{a}$$

La condición de equilibrio se cumple para $\theta = 0°$ y para el valor hallado de la constante k del muelle. Calculemos a continuación la derivada segunda de la energía potencial

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = L(ak - \frac{P}{2})\cos\theta = 0$$

Para el valor hallado de k la segunda derivada, así como todas las sucesivas, tienen valor nulo, luego el equilibrio es indiferente y el sistema permanece en equilibro para cualquier valor de θ.

© Los autores, 2000; © Edicions UPC, 2000.

www.elsolucionario.net